

Stationäre Gleichgewichte in einem CD-OLG-
Modell mit logistischer Regeneration erneuerbarer
Ressourcen:

Existenz, dynamische Stabilität und Effizienz

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Science

der Studienrichtung Umweltsystemwissenschaften mit Fachschwerpunkt
Volkswirtschaftslehre

an der Karl-Franzens-Universität Graz

vorgelegt von

Sabrina-Sigrid SPIEGEL, BSc

am Institut für Volkswirtschaftslehre

Begutachter: Ao.Univ.-Prof.Dr. Karl Farmer

Graz, 2013



Vorwort

Die vorliegende Masterarbeit entstand 2013 im Rahmen meines Studiums der Umweltsystemwissenschaften mit Fachschwerpunkt Volkswirtschaftslehre an der Karl Franzens Universität Graz im Seminar „Ökonomik der Umwelt“. Während ich im Sommersemester 2012 den Kurs für „Fortgeschrittene Umwelt- und Ressourcenökonomik“ absolvierte, merkte ich, dass für mich die analytische Herangehensweise an die Inhalte und Fragestellungen eine positive Herausforderung darstellten und ich mich dafür begeistern konnte. Deshalb strebte ich eine Masterarbeit im Folgeseminar an und entschied mich aufgrund der Aktualität des Themas knapper Ressourcen für ein Modell, das die Nachhaltigkeit erneuerbarer Ressourcen hinterfragt.

An dieser Stelle möchte ich mich als erstes bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Karl Farmer für seine inhaltliche Unterstützung und sein immer rasches und oft aufmunterndes Feedback, das mich immer wieder sehr motiviert hat, bedanken.

Natürlich bedanke ich mich bei meiner gesamten Familie, die während meines Studiums alle hinter mir standen, aber ganz besonders danke ich meiner Mutter Christine Spiegel für ihre Unterstützung in jeglicher Hinsicht. Du hast mir nicht nur während allen Höhen und Tiefen meiner gesamten Studienzeit zur Seite gestanden, sondern warst und bist in allen anderen Lebenslagen eine wichtige Ansprechpartnerin.

Vor allem aber danke ich meinem Sohn Yassin Leon, der durch seine Geduld, die durch notwendige Entbehrungen in der letzten anstrengenden Phase des Studiums nötig waren, zur Bewältigung meines Studiums wesentlich beigetragen hat. Dir ist diese Arbeit gewidmet.

Zusammenfassung

Mourmouras (1991) integrierte in ein Diamond (1965)-Modell mit überlappenden Generationen eine erneuerbare Ressource und konnte in diesem intergenerationelle Gleichheit von natürlichem Kapital feststellen. Jedoch verwendete er eine lineare Regenerationsfunktion. Die Eigenschaften von erneuerbaren Ressourcen wie Wald und Fischbeständen werden jedoch besser durch eine logistische Regenerationsfunktion beschrieben. Somit kann in Frage gestellt werden, ob das Ergebnis nach Mourmouras auch in einem OLG-Diamond Modell mit einer logistischen Regenerationsfunktion erreicht werden kann. Dazu ist zuerst zu fragen, ob im OLG-Modell mit logistischer Regeneration ein nicht-trivialer stationärer Zustand, der per definitionem intergenerationelle Gleichheit impliziert, überhaupt existiert und ob dieser dynamisch stabil ist. In dieser Arbeit werden hinreichende Voraussetzungen bezüglich Nutzen-, Produktions-, und Regenerationsfunktion gezeigt, sodass auch bei Verwendung einer logistischen Regenerationsfunktion ein nicht-trivialer stationärer Zustand, der auch dynamisch stabil ist, existiert. Außerdem wird gezeigt, dass das intertemporale Marktgleichgewicht im Modell mit logistisch regenerierenden erneuerbaren Ressourcen in der kurzen Frist immer intergenerationell effizient ist. In der langen Frist ist dies jedoch nur dann der Fall, wenn die Eigenertragsrate des stationären Ressourcenbestands im Marktgleichgewicht größer als Null ist.

Inhalt

Einleitung.....	6
1. Log-lineares CD OLG Modell mit Kapital unter logistisch regenerierenden Ressourcen	9
1.1 Die Regenerationsfunktion.....	9
1.2 Das Modell.....	11
1.3.1 Haushaltsoptimierung mit „beginning-of-period“ Märkten	11
1.3.2 Profitmaximierung der Firmen und Markträumung	15
1.3.3 Die intertemporale Gleichgewichtsdynamik bei „beginning-of-period“ Märkten.....	16
1.3.4 Haushaltsoptimierung und Gleichgewichtsdynamik mit „end-of-period“ Märkten	19
1.4 Ein log-lineares CD-OLG Modell ohne Kapital unter logistischer Regeneration	22
2. Existenz und Stabilität stationärer Zustände im log-linearen CD OLG Modell mit Kapital	25
2.1 Existenz stationärer Zustände	25
2.2 Stabilität der stationären Zustände.....	30
2.2.1 Instabilität des trivialen stationären Zustandes	31
2.2.2 Stabilität des nicht-trivialen stationären Zustands	32
2.3 Sattelpfade, die sich dem nicht-trivialen stationären Zustand annähern.....	34
3. Effizienz des intertemporalen Gleichgewichts	38
3.1 Effizienz des intertemporalen Gleichgewichts in der kurzen Frist	38
3.1.1 First-Order-Conditions für kurzfristige Effizienz	39
3.1.2 Intergenerationelle Effizienz des intertemporalen Marktgleichgewichts in der kurzen Frist.....	41
3.2 Effizienz des intertemporalen Gleichgewichts in der langen Frist	43
3.2.1 Notwendige Bedingungen für die intergenerationelle Effizienz in der langen Frist	44
3.2.2 Intergenerationelle Effizienz des intertemporalen Marktgleichgewichts in der langen Frist	56
4. Zusammenfassung.....	59
5. Appendix.....	61
5.1.1 Intertemporale Budgetbeschränkung	61
5.1.2 Konsumlevel der Junghaushalte.....	62
5.1.3 Gleichgewichtsdynamik des Kapitals.....	63
5.1.4 Schranken für die Ressourcenernte	64
5.1.5 Bewegungsgleichung der Ernte	64
5.1.6 Haushaltsoptimierung unter „end-of-period“ Märkten	65
5.1.7 Haushaltsoptimierung im OLG-Modell ohne Kapital	67
5.2.1 Eigenwerte der Jacobi-Matrix	68

5.2.2 Instabilität des trivialen stationären Zustands	69
5.2.3 Spur, Determinante und Diskriminante des nicht-trivialen stationären Zustands	71
5.3.1 FOCs für kurzfristig intergenerationelle Effizienz.....	72
5.5.1. Programmcode Mathematica Abbildung 1	73
5.5.2 Programmcode Mathematica Abbildung 2	73
5.5.3 Programmcode Mathematica Abbildung 3	74
5.5.4 Programmcode Mathematica Abbildung 4	74
5.5.5 Programmcode Mathematica Abbildung 7	75
5.5.6 Programmcode Mathematica Abbildung 8	75
6. Verwendete Variablen und ihre Bedeutung.....	77
7. Abbildungsverzeichnis.....	80
8. Quellenverzeichnis	81

Einleitung

Vor dem Hintergrund wachsender ökonomischer, sozialer und ökologischer Probleme machte der Brundtland Report der Weltkommission für Umwelt und Entwicklung 1987 das Konzept der nachhaltigen Entwicklung einer breiten Öffentlichkeit bekannt. Die Kommission stellte fest, dass die Weltwirtschaft die Bedürfnisse der Menschen befriedigen müsse, ohne die ökologischen Grenzen der Erde zu sprengen und die Befriedigung der Bedürfnisse zukünftiger Generationen einzuschränken. (Grundwald et al, 2006)

In Diskussionen ökologischer Nachhaltigkeit im Sinne intergenerationeller gleicher Ressourcenbestände gilt es zu hinterfragen, ob eine wettbewerbsfähige Marktwirtschaft mit erneuerbaren Ressourcen als Produktionsinput und Vermögensanlage fähig ist, intertemporale Gleichgewichtspfade mit einer egalitären Verteilung von Ressourcenstöcken zwischen Generationen zu entwickeln (Farmer und Bednar-Friedl, 2010). Mourmouras integrierte 1991 in ein Diamond-Modell (Diamond, 1965) mit überlappenden Generationen (OLG) eine erneuerbare Ressource, die essentiell für die Produktion ist. In diesem Modell existiert genau ein stationärer Zustand, der auch dynamisch stabil ist. Außerdem besteht unter bestimmten Annahmen ein intertemporaler Gleichgewichtspfad auf dem das produzierte Kapital akkumuliert und die Ressourcenstöcke über Generationen hinweg gleich bleiben. Für die Erreichbarkeit von nachhaltigem Wachstum muss also jede Generation bereit sein die Menge an Ressourcenbestand für die Folgegeneration zu erhalten, die sie von der vorhergehenden Generation übernommen hat. Allerdings verwendete Mourmouras für sein Modell eine lineare Regenerationsfunktion. (Mourmouras, 1991) Eine lineare Regenerationsfunktion ist aber nur dann anwendbar, wenn die Wachstumsrate der natürlichen Ressource nicht vom Ressourcenstock abhängt, was zum Beispiel für den Gebrauch von Wasserkraft relevant ist. (Koskela et al., 2002) Die Eigenschaften von anderen erneuerbaren Ressourcen wie Wälder und Fischbestände werden besser durch eine logistische Regenerationsfunktion wiedergegeben (Farmer, 2000). In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, welchen Einfluss die Änderung der Regenerationsfunktion auf Existenz und Stabilität stationärer Zustände hat und wie sich das auf die Erreichbarkeit von nachhaltigem Wachstum wie in Mourmouras Modell auswirkt.

Da stationäre Zustände per Definition als ökonomisch und ökologisch nachhaltig bezeichnet werden können, wird in dieser Arbeit untersucht, ob in einem OLG Modell mit logistisch regenerierenden Ressourcen die Existenz und dynamische Stabilität von stationären Zuständen und die Erreichbarkeit von nachhaltigem Wachstum nachgewiesen werden können. Außerdem soll hinterfragt werden, ob ein solches stationäres Gleichgewicht, sofern es existiert, in der kurzen Frist effizient ist und wenn ja, ob daraus auch langfristige Effizienz des stationären Gleichgewichts abgeleitet werden kann.

Farmer (2000) verallgemeinerte das OLG Modell von Mourmouras (1991), indem er eine logistische Regenerationsfunktion in das Modell integrierte. Er kam zu dem Ergebnis, dass die Existenz von einem nicht-trivialen stationären Zustand unter logistischer Regeneration nur dann gegeben ist, wenn bestimmte Annahmen bezüglich Parameter der Nutzen-, Produktions- und natürlicher Wachstumsfunktion getroffen werden. (Farmer, 2000)

Koskela et al. (2002) integrierten eine erneuerbare Ressource in ein Generationen überlappendes Modell ohne Kapital und stellten fest, dass die Stabilität eines stationären Zustands stark von der Art des Ressourcenwachstums abhängt. So existiert bei linearem Wachstum genau ein stationäres Gleichgewicht, das dynamisch stabil ist, wobei bei logistischer Wachstumsfunktion mindestens zwei existieren, von denen eines stabil und das andere instabil ist. Das instabile stationäre Gleichgewicht ist dabei immer effizient, wohingegen das stabile stationäre Gleichgewicht unter bestimmten Annahmen auch ineffizient sein kann (Koskela et al, 2002).

Im ersten Teil wird das log-lineare Cobb-Douglas OLG Modell mit produziertem Kapital nach Farmer (2000) beschrieben, indem die individuellen Optimierungs- und Markträumungsbedingungen definiert werden. Aus diesen Bedingungen werden im nächsten Schritt die Gleichgewichtsdynamiken von Ressourcenernte und Ressourcenstock hergeleitet. Es soll auch hervorgehoben werden, dass im Modell nach Farmer (2000) der existierende Ressourcenstock am Beginn der Periode zwischen den jungen und alten Haushalten gehandelt wird, was erstmals in dieser Form in der Literatur von intertemporalen Ressourcenmodellen formuliert wurde. Es wird auch gezeigt, wie sich die Optimierungsbedingungen der Individuen bei einem Handel des vorhandenen Ressourcenstocks am Ende der Periode ändern und

welchen Einfluss diese Änderungen auf die Ergebnisse der Gleichgewichtsdynamiken haben.

Im Vergleich zu diesem Modell mit produziertem Kapital wird ein Modell ohne produziertes Kapital, wie von Koskela et al. 2002 verwendet, beschrieben. Hier werden die individuellen Optimierungsbedingungen hergeleitet. Um die beiden Modelle vergleichbar zu machen, wird die quasi-lineare Nutzenfunktion - wie von Koskela et al verwendet - durch eine log-lineare Nutzenfunktion ersetzt. Es wird erwartet, dass sich die Ergebnisse der Optimierungsbedingungen nicht wesentlich unterscheiden. Im zweiten Teil wird die Existenz stationärer Zustände im OLG Modell mit produziertem Kapital unter logistischer Regeneration hinterfragt. Es werden die erforderlichen Bedingungen zu Präferenzen, Technologie und dem natürlichen Wachstumspotential der erneuerbaren Ressource aufgezeigt, die notwendig sind, wenn ein nicht-trivialer stationärer Zustand angestrebt wird. Danach werden die Instabilität des trivialen stationären Zustands und die Sattelpunkt-Stabilität des nicht-trivialen stationären Zustands aufgezeigt. Abschließend in diesem Kapitel wird gezeigt, dass nachhaltiges Wachstum unter einer logistischen Regenerationsfunktion nur unter einer bestimmten Annahme erreichbar ist. Der dritte Teil der Arbeit konzentriert sich auf die Hinterfragung der Effizienz des in den vorigen Kapiteln definierten stationären Gleichgewichts in der kurzen und langen Frist. Um die kurzfristig intergenerationelle Effizienz des intertemporalen Marktgleichgewichts zu beweisen, wird gezeigt, dass die Bedingungen für das intertemporale Marktgleichgewicht die Bedingungen für kurzfristig intergenerationelle Effizienz implizieren. Bei der Darstellung der Bedingungen für langfristige Effizienz wird vor allem die Auswirkung der Berücksichtigung der Interessen der anfangs alten Generation hervorgehoben und die unterschiedlichen Ergebnisse durch diese Unterscheidung dargestellt. Abschließend wird die langfristige intergenerationelle Effizienz des Marktgleichgewichts bewiesen.

1. Log-lineares CD OLG Modell mit Kapital unter logistisch regenerierenden Ressourcen

1.1 Die Regenerationsfunktion

Erneuerbare Ressourcen wie Fischbestände können anhand einer Regenerationsfunktion analysiert werden. Die Regenerationsfunktion gibt den absoluten Zuwachs einer Ressource in einer Periode oder zu einem Zeitpunkt gemessen in Ressourceneinheiten wieder. In dieser Arbeit wird eine logistische Regenerationsfunktion verwendet, welche für Eigenschaften einer erneuerbaren Ressource geeignet ist. Die von Mourmouras (1991) verwendete lineare Wachstumsfunktion wie in Abbildung 1 ist nur in jenen Fällen anwendbar, wo das Wachstum der Ressourcen nicht vom Ressourcenbestand abhängt, wie das zum Beispiel bei Wasserkraft der Fall ist. Auch bei sehr geringen Ressourcenbeständen wächst die Ressource annähernd linear.

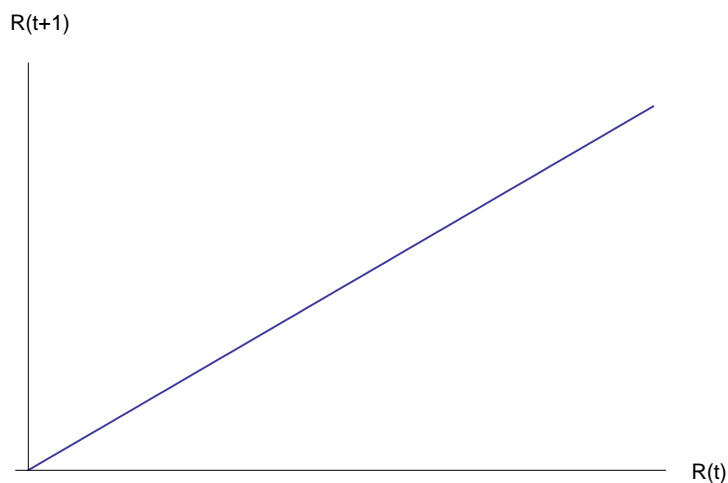


Abbildung 1: lineare Wachstumsfunktion (Quelle: eigene Darstellung; siehe Appendix 5.5.1)

Die logistische Regenerationsfunktion gleicht einer sigmoiden Wachstumsfunktion, welche für dichteabhängige Populationen verifiziert wurde. Sie wird durch eine logistische Gleichung beschrieben:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[\frac{K-N}{K} \right].$$

Die Gleichung besagt, dass der Bestandszuwachs pro Zeiteinheit $\frac{dN}{dt}$ gleich der Zuwachsrate pro Kopf r mal der Populationsgröße N mal dem ungenutzten Freiraum für weiteres Wachstum $[\frac{K-N}{K}]$ ist. Der Zuwachs geht also gegen 0, wenn der ungenutzte Freiraum gegen 0 geht (Hickman et al, 2008, S. 1232). Angewendet auf erneuerbare Ressourcen bedeutet dies also, dass der absolute Zuwachs der Ressource vom existierenden Ressourcenstock abhängt. Am Beispiel eines Fischbestandes bedeutet das, je mehr Fische vorhanden sind, desto größer ist die Anzahl der Nachkommen. Dieses Wachstum hält solange an, bis Wachstumsgrenzen (zum Beispiel Limitierung des vorhandenen Platzes) greifen. Dieser Punkt wird als Maximum Sustainable Yield (R^{MSY}) bezeichnet. Nach diesem Punkt wird das Wachstum mit zunehmendem Ressourcenstock kleiner. In dieser Arbeit wird folgende Form der Regenerationsfunktion verwendet:

$$g(R_t) \equiv \Pi R_t - \Omega R_t^2, \text{ wobei } \Pi = 1 + \pi.$$

Π stellt in der Funktion den wachstumsfördernden und Ω den wachstumsverringenden Faktor dar. Als Konsequenz existiert ein minimaler Bestand von 0, der im Ursprung abgelesen werden kann und ein maximaler Bestand welcher als Tragfähigkeitsgrenze bezeichnet wird (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S.76-77).

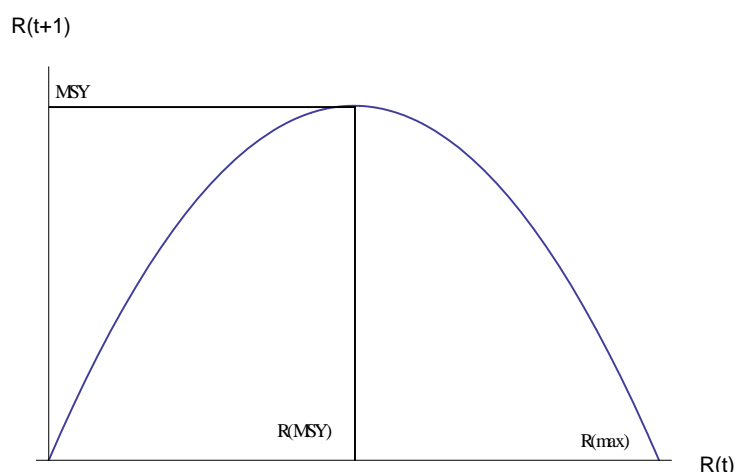


Abbildung 2 logistische Regenerationsfunktion (Quelle: eigene Darstellung: siehe Appendix 5.5.2)

1.2 Das Modell

Für diese Arbeit wird ein Diamond (1992) Modell mit überlappenden Generationen (OLG) mit log-linearer Nutzenfunktion und Cobb Douglas Produktionsfunktion verwendet. In jeder Zeitperiode konsumiert eine junge Generation c_t^1 (t gibt die Zeitperiode wieder und der Superskript 1 zeigt, dass es sich um einen Junghaushalt handelt) und eine alte Generation c_t^2 . In der nächsten Zeitperiode werden die jungen zu alten Haushalten und konsumieren c_{t+1}^2 und verlassen dann die Ökonomie. Firmen agieren eine Zeitperiode und produzieren ein einheitliches Gut Y . Dieses wird entweder konsumiert oder in den Kapitalstock der nächsten Periode investiert (K_{t+1}). Die Produktion der Firmen wird durch eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion beschrieben. Neben dem Produktionsinput Arbeit N_t^Y und Kapital K_t^d fließt auch die geerntete Ressource X_t^d in die Produktion mit ein. α_1 , α_2 und α_3 geben die Produktionselastizitäten des jeweiligen Faktors wieder und müssen in Summe 1 ergeben. Die Produktionsfunktion nimmt daher folgende Form an:

$$Y_t = F(X_t^d, N_t^Y, K_t^d) = (X_t^d)^{\alpha_1} (N_t^Y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3}.$$

1.3.1 Haushaltsoptimierung mit „beginning-of-period“ Märkten

Im betrachteten Modell ist eine erneuerbare Ressource integriert, welche als Produktionsinput und Vermögensanlage agiert und sich logistisch regeneriert. Neben dieser abweichenden Regenerationsfunktion ist auch der Besitz des natürlichen Ressourcenstocks anders als in Mourmouras (1991) OLG-Modell. Während Mourmouras keine expliziten Annahmen über den Besitz des Ressourcenstocks macht, ist die natürliche Ressource in diesem Modell im privaten Besitz und somit auch zwischen den Generationen handelbar. Der bereits existierende Ressourcenstock R_t wird zu Beginn der Periode zum Preis p_t zwischen jungen und alten Haushalten, der Ertrag der Ressourcenernte X_t am Ende der Periode zum am Beginn der Periode festgelegten Preis q_t zwischen jungen Haushalten und Produzenten gehandelt. Es gibt keine Erntekosten und Transaktionskosten. Der alte Haushalt bietet am Beginn der Periode den Ressourcenstock zum Preis p_t an und

erhält zusätzlich ein Kapitaleinkommen. Dieses Kapitaleinkommen resultiert aus den Einnahmen r_t , die bei der Vermietung einer Kapitaleinheit für eine Periode an die Produzenten generiert werden. Aus diesen Einnahmen finanziert er seinen Ruhestandskonsum c_t^2 . Die Budgetbeschränkung des alten Haushalts nimmt also für den Zeitpunkt t folgende Form an:

$$c_t^2 = p_t R_t + r_t K_t.$$

Die jungen Haushalte erhalten aus ihrem Arbeitseinsatz von einer Einheit ein Lohneinkommen w_t und zusätzlich Erträge aus dem Angebot der Ressourcenernte am Ende der Periode zum Preis q_t . Diesen Einnahmen stehen die Ausgaben für den Kauf des Ressourcenstocks am Anfang der Periode, den Konsum der Periode und den Kapitalinvestitionen K_{t+1} gegenüber (1.1). In der Folgeperiode setzen sich die Einnahmen aus dem Ertrag des Ressourcenverkaufs und dem Kapitalertrag zusammen (1.2). Der junge Haushalt steht also folgendem intertemporalen Maximierungsproblem gegenüber.

$$\max \rightarrow \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$p_t R_t + c_t^1 + K_{t+1} = q_t X_t + w_t, \quad (1.1)$$

$$c_{t+1}^2 = r_{t+1} K_{t+1} + p_{t+1} R_{t+1}, \quad (1.2)$$

$$R_{t+1} = R_t + g(R_t) - X_t, \quad (1.3)$$

$$c_t^1 \geq 0, R_t \geq 0, X_t \geq 0, c_{t+1}^2 \geq 0, K_{t+1} \geq 0, R_{t+1} \geq 0.$$

Der Zeitdiskontfaktor β liegt zwischen 0 und 1 und zeigt an, dass der gegenwärtige Konsum dem zukünftigen Konsum vorgezogen wird. Die dritte Gleichung (1.3) ist die Netto regenerationsfunktion. Demnach setzt sich der Ressourcenstock der Folgeperiode aus dem jetzigen Ressourcenstock und dem sich regenerierenden Ressourcenbestand zusammen, wobei die geerntete Menge abgezogen wird.

Um die Optimierungsbedingungen für den Junghaushalt herleiten zu können, wird eine Lagrangefunktion aufgestellt. Um eine einzige Nebenbedingung zu erhalten, wird in die Budgetbeschränkung der Folgeperiode die Netto regenerationsfunktion

eingesetzt und danach nach K_{t+1} aufgelöst und das Ergebnis wiederum in die Budgetbeschränkung der jetzigen Periode eingesetzt.

$$c_{t+1}^2 = r_{t+1}K_{t+1} + p_{t+1}(R_t + g(R_t) - X_t),$$

$$K_{t+1} = \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (R_t + g(R_t) - X_t),$$

$$p_t R_t + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (R_t + g(R_t) - X_t) = q_t X_t + w_t.$$

Damit ergibt sich folgende Lagrangefunktion:

$$L = \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t [q_t X_t + w_t - p_t R_t - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (R_t + g(R_t) - X_t)] \quad (1.4)$$

Um die Optimierungsbedingungen für die Junghaushalte zu erhalten, wird nach der Ressourcenernte, dem Ressourcenstock, dem Konsum der jetzigen Periode und der Folgeperiode abgeleitet:

$$\frac{\partial L}{\partial X_t} = \lambda_t q_t - \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_t} = -\lambda_t p_t + \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (\Pi - 1) - 2\lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \Omega R_t = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^1} = \frac{1}{c_t^1} - \lambda_t = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^2} = \frac{\beta}{c_{t+1}^2} - \lambda_t \frac{1}{r_{t+1}} = 0. \quad (1.8)$$

Wird in (1.5) der Lagrangemultiplikator herausgehoben und auf die andere Seite dividiert und nach q_t aufgelöst, ergibt sich die No-Arbitrage Bedingung:

$$q_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}}. \quad (1.9)$$

Die No-Arbitrage Bedingung stellt sicher, dass der Haushalt zwischen Ressourcenernte und Ressourcenkonservierung indifferent ist, dafür muss der Preis für den Ernteertrag dem abgezinsten Preis für den Ressourcenstock der Folgeperiode gleichen. In der zweiten Ableitung (1.6) lässt sich der Lagrangemultiplikator ebenfalls herausheben und auf die andere Seite dividieren, sodass folgende Gleichung entsteht:

$$-p_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (\Pi - 1) - 2 \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \Omega R_t = 0,$$

$$p_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (1 + (\Pi - 1) - 2\Omega R_t) = 0,$$

$(\Pi - 1) - 2\Omega R_t$ entspricht der Steigung der Regenerationsfunktion $g'(R_t^d)$, welche die Eigenertragsrate der Ressource angibt. Formt man weiters nach r_{t+1} um, erhält man die Hotelling Rule, die sicherstellt, dass der Kapitalertragsfaktor (auf der linken Seite von (1.50)) gleich dem Eigenertragsfaktor (=1 + Eigenertragsrate) multipliziert mit dem Wachstumsfaktor des Ressourcenbestandspreis (auf der rechten Seite von (1.10)) ist.

$$r_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t} (1 + g'(R_t^d)). \quad (1.10)$$

Der Ertragsfaktor aus der Anlag einer zusätzlichen Geldeinheit in Realkapital entspricht den marginalen Opportunitätskosten, die dem Ertragsfaktor aus der Investition einer zusätzlichen Geldeinheit in den Ressourcenbestand gleich sind. Das heißt die Preissteigerungsrate des Ressourcenbestands und die Rendite des Kapitals müssen im Gleichgewicht gleich hoch sein. Es darf also nicht profitabler sein den Ressourcenbestand zu verkaufen, um den Erlös in Realkapital zu investieren (vgl. Hotelling, 1931).

Wird der aus (1.7) hervorgehende Lagrangemultiplikator in Gleichung (1.8) eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{1}{c_t^1} = \frac{\beta r_{t+1}}{c_{t+1}^2}, \quad (1.11)$$

was bedeutet, dass der Grenznutzen von jetzigem und der diskontierte Grenznutzen vom zukünftigem Konsum der jungen Generation sich gleichen müssen. Die Entscheidung, ob in der jetzigen oder Folgeperiode konsumiert wird, darf nicht durch einen Nutzenvorteil bestimmt werden. Aus den Budgetbeschränkungen (1.1)-(1.3) und den hergeleiteten Optimierungsbedingungen (1.9)-(1.11) ergibt sich die intertemporale Budgetbeschränkung (siehe Appendix 5.1.1):

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_{t+1} q_t \left[\frac{g(R_t^d)}{R_t^d} - g'(R_t^d) \right] R_t^d. \quad (1.12)$$

In dieser Gleichung wird ersichtlich, dass der auf die Gegenwart diskontierte Wert des Konsums der jüngeren Generation nicht nur aus ihrem Lohneinkommen besteht, sondern auch aus dem Gegenwartswert der Rente (Differenz des Durchschnitts- und des Grenzprodukts) der erneuerbaren Ressource. Der junge Haushalt bezieht also nicht nur Arbeitseinkommen, sondern auch die Rente aus dem Besitz der erneuerbaren Ressource. Die Rente der Ressource ist positiv, da die

Regenerationsfunktion strikt konkav ist, was impliziert, dass das Durchschnittsprodukt immer größer als das Grenzprodukt ist. (vgl. Farmer, 2000)
 Auf Basis der intertemporalen Budgetbeschränkung kann nun das Konsumniveau der Junghaushalte bestimmt werden (siehe Appendix 5.1.2).

$$c_t^1 = \frac{1}{(1+\beta)} \{w_{t+1} + q_t \left[\frac{g(R_t^d)}{R_t^d} - g'(R_t^d) \right] R_t^d\} \quad (1.13)$$

Der Konsumlevel der Althaushalte ergibt sich, wenn Hotelling-Rule und No-Arbitrage Bedingung in die Budgetbeschränkung der Althaushalte, das heißt

$$c_t^2 = p_t R_t + r_t K_t$$

eingesetzt werden:

$$c_t^2 = R_t [1 + g'(R_t^d)] q_t + r_t K_t. \quad (1.14)$$

1.3.2 Profitmaximierung der Firmen und Markträumung

Der Profit der Firmen ergibt sich, wenn von der gesamten Güterproduktion die Kosten für die Produktionsfaktoren Arbeit, Ressourcenernte und Kapital abgezogen werden. Die Firmen maximieren diesen Profit in jeder Periode t .

$$\max \rightarrow (X_t^d)^{\alpha_1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} - w_t N_t^y - q_t X_t^d - r_t K_t^d \quad (1.15)$$

Dabei müssen folgende Bedingungen gelten: $N_t^y \geq 0$, $X_t^d \geq 0$, $K_t^d \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Um die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für den maximalen Profit zu erhalten, wird die Gewinnfunktion (1.15) nach Arbeit, Ernte und Kapital partiell abgeleitet und die Ableitungen werden gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial N_t^y} = (X_t^d)^{\alpha_1} \alpha_2 (N_t^y)^{\alpha_2-1} (K_t^d)^{\alpha_3} - w_t = 0,$$

$$(X_t^d)^{\alpha_1} \alpha_2 (N_t^y)^{\alpha_2-1} (K_t^d)^{\alpha_3} N_t^y = w_t N_t^y,$$

$$\alpha_2 Y_t = w_t N_t^y. \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_t^d} = \alpha_1 (X_t^d)^{\alpha_1-1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} - q_t = 0,$$

$$\alpha_1 (X_t^d)^{\alpha_1-1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} X_t^d = q_t X_t^d,$$

$$\alpha_1 Y_t = q_t X_t^d. \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t^d} = (X_t^d)^{\alpha_1} (N_t^y)^{\alpha_2} \alpha_3 (K_t^d)^{\alpha_3 - 1} - r_t = 0,$$

$$(X_t^d)^{\alpha_1} (N_t^y)^{\alpha_2} \alpha_3 (K_t^d)^{\alpha_3 - 1} K_t^d = r_t K_t^d,$$

$$\alpha_3 Y_t = r_t K_t^d. \quad (1.18)$$

Die jeweiligen Kosten für den Produktionsfaktor müssen also der Grenz- (=Durchschnitts) Produktivität des eingesetzten Faktors gleichen.

Intertemporales Marktgleichgewicht erfordert außerdem, dass der Markt des Ressourcenstocks, der Kapital- und Arbeitsmarkt, der Markt der Ressourcenernte und der Gütermarkt geräumt sind. Das heißt, dass am jeweiligen Markt die angebotene Menge jeweils der nachgefragten Menge entsprechen muss und am Gütermarkt muss die Güterproduktion der Summe des Konsums von Alt- und Junghaushalten und den Kapitalinvestitionen der Folgeperiode gleichen.

$$R_t^d = R_t \quad (1.19)$$

$$K_t^d = K_t \quad (1.20)$$

$$N_t^y = 1 \quad (1.21)$$

$$X_t^d = X_t \quad (1.22)$$

$$(X_t^d)^{\alpha_1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} = c_t^1 + c_t^2 + K_{t+1} \quad (1.23)$$

Die Bedingung für die Gütermarkträumung gilt automatisch, wenn alle anderen Markträumungsbedingungen gelten (Walras Law). Somit kann (1.23) vernachlässigt werden (Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S.118-121).

1.3.3 Die intertemporale Gleichgewichtsdynamik bei „beginning-of-period“ Märkten

In diesem Abschnitt wird die intertemporale Gleichgewichtsdynamik von Ernte und Ressourcenbestand unter der Annahme hergeleitet, dass der Ressourcenbestandsmarkt zu Beginn der jeweiligen Periode geräumt wird. „Beginning-of-period“ Vermögenmärkte sind solche, auf denen die Preisfestlegung und die Transaktion eines Vermögensobjekts zum gleichen Zeitpunkt, also zu Beginn der Periode, erfolgen. Um die intertemporale Gleichgewichtsdynamik der

Ressourcenernte, des produzierten Kapitals und des Stocks des natürlichen Kapitals herzuleiten, müssen die intertemporale Budgetbeschränkung (1.12), die Gleichungen zur Bestimmung der Konsumlevels der Junghaushalte (1.13) und Althaushalte (1.14), sowie die Marktäumungsbedingungen (1.19) – (1.23) kombiniert werden. Die intertemporale Budgetbeschränkung, der Konsum der Alt- und Junghaushalte, sowie die Marktäumungsbedingungen werden in die Räumungsbedingung des Gütermarkts (1.23) eingesetzt:

$$(X_t)^{\alpha_1} (K_t)^{\alpha_3} = \frac{1}{(1+\beta)} \{w_{t+1} q_t \left[\frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t) \right] R_t\} + R_t [1 + g'(R_t)] q_t + r_t K_t + K_{t+1} \text{ bzw.}$$

$$K_{t+1} = (X_t)^{\alpha_1} (K_t)^{\alpha_3} - \frac{1}{(1+\beta)} \{w_{t+1} q_t \left[\frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t) \right] R_t\} - R_t [1 + g'(R_t)] q_t - r_t K_t \text{ mit}$$

$$\gamma = \frac{1}{(1+\beta)} \text{ und daher:}$$

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \{w_{t+1} q_t \left[\frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t) \right] R_t\} - R_t [1 + g'(R_t)] q_t - r_t K_t ,$$

$$\Phi(R_t) = \frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t),$$

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \{w_{t+1} q_t \Phi(R_t) R_t\} - R_t [1 + g'(R_t)] q_t - r_t K_t . \quad (1.24)$$

Setzt man nun die Marktäumungsbedingungen in die Profitmaximierungsbedingungen und diese wiederum in (1.24) ein und zieht die Hotelling Rule (1.10) und die No-Arbitrage Bedingung (1.9) hinzu, ergibt sich eine weitere Gleichung für K_{t+1} (Herleitung siehe Appendix 5.1.3):

$$K_{t+1} = \alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{(1 + g'(R_{t+1}))} \right] \left(\frac{Y_t}{X_t} \right). \quad (1.25)$$

Um die Bewegungsgleichung für die Ressourcenernte zu erhalten, werden die Gleichungen für K_{t+1} miteinander kombiniert. Damit die Gleichgewichtsdynamik für die Ressourcenernte gilt, muss garantiert sein, dass die Erntemenge in der Periode t weder zu klein noch zu groß ist. Eine nicht zu große Erntemenge sichert $R_{t+1} \geq 0$. Wegen der Notwendigkeit der Ressourcenernte in der Güterproduktion würde eine zu kleine Erntemenge kein positives Y_t ermöglichen. Eine nicht zu kleine Erntemenge garantiert, dass die nächste Generation genügend Startkapital hat:

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \alpha_2 Y_t - \gamma \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} - \alpha_3 Y_t \geq 0.$$

Mathematisch folgt aus $R_{t+1} \geq$ und $K_{t+1} \geq 0$, dass für alle t folgende Bedingung gelten muss (siehe Appendix 5.1.4):

$$\frac{\alpha_1 R_t \{\gamma \Phi(R_t) + [1 + g'(R_t)]\}}{[\alpha_1 + \alpha_2 \sigma]} \leq X_t \leq R_t + g(R_t), \forall t \quad 1 + g'(R_t) \geq 0. \quad (1.26)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, können die beiden Gleichungen für K_{t+1} (1.24) und (1.25) gleichgesetzt werden. Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung für die Ressourcenernte (siehe Appendix 5.1.5).

$$X_{t+1} = \frac{1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})] \{X_t (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t\} \quad (1.27)$$

Die Bewegungsgleichung des Ressourcenstocks ist identisch mit der Netto-Regenerationsfunktion.

$$R_{t+1} = R_t + g(R_t) - X_t \quad (1.28)$$

Um die Bewegungsgleichung von produziertem Kapital zu erhalten, wird noch die Produktionsfunktion eingesetzt, sodass sich folgende Gleichung ergibt:

$$K_{t+1} = \alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{(1 + g'(R_{t+1}))} \right] (X_t^{\alpha_1 - 1} K_t^{\alpha_3}) \quad (1.29)$$

Da das produzierte Kapital in den Bewegungsgleichungen des Ressourcenstocks und der Ressourcenernte nicht vorkommt, gilt es die Bedingungen des zweidimensionalen nicht linearen Differenzgleichungssystems bestehend aus den Gleichgewichtsdynamiken von Ressourcenstock (1.28) und Ressourcenernte (1.27) zu untersuchen. Jener Pfad, auf dem der Ressourcenstock über die Zeit steigt wird aus der Gleichung (1.28) ersichtlich, wenn also gelten muss, dass $R_{t+1} \geq R_t$. Dies kann nur gelten, wenn $g(R_t) \geq X_t$. Um den Pfad zu bestimmen, auf dem die Ressourcenernte über die Zeit steigt, muss gelten, dass $X_{t+1} \geq X_t$ ist. Aus der Bewegungsgleichung für die Ressourcenernte geht also folgende Beziehung hervor:

$$\frac{1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})] \{X_t (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t\} \geq X_t \text{ bzw.}$$

$$[1 + g'(R_{t+1})] \{X_t (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t\} \geq \alpha_3 X_t. \quad (1.30)$$

1.3.4 Haushaltoptimierung und Gleichgewichtsdynamik mit „end-of-period“ Märkten

Die Annahme des Handels mit natürlichem Kapital am Beginn der Periode ist ungewöhnlich in der Literatur zu intertemporaler Ressourcenökonomik. Traditionell (z.B. Koskela et al. 2002) werden die Ressourcenbestandsmärkte als „end-of-period“ Vermögenmärkte konzipiert. In diesem Kapitel wird daher gezeigt, welche Auswirkungen diese Änderung der Vermögensmarktgleichgewichtskonzeption auf die Optimierungsbedingungen der Haushalte und die Gleichgewichtsdynamik der Ressourcenernte und Ressourcenstocks haben.

Wird die natürliche Ressource zwischen dem jungen Haushalt und dem alten Haushalt am Ende der Periode t gehandelt, ändern sich die Budgetbeschränkungen, sowie die Akkumulationsgleichung des natürlichen Kapitals folgendermaßen:

$$p_t R_{t+1} + c_t^1 + K_{t+1} = w_t, \quad (1.31)$$

$$c_{t+1}^2 = r_{t+1} K_{t+1} + p_{t+1} R_{t+2} + q_{t+1} X_{t+1}, \quad (1.32)$$

$$R_{t+2} = R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}. \quad (1.33)$$

Da nun der natürliche Ressourcenstock am Ende der Periode gehandelt wird, zählt zu den Ausgaben des Junghaushaltes der Preis der Ressource p_t mal dem Ressourcenstock am Ende der Periode. Daher ändert sich auch die Einnahme dieses Haushaltes in der nächsten Periode, da auch in der Folgeperiode die natürliche Ressource erst am Periodenende gehandelt wird. Die angepasste Regenerationsfunktion wird in (1.32) eingesetzt und nach K_{t+1} aufgelöst:

$$p_t R_{t+1} + c_t^1 + K_{t+1} = w_t,$$

$$c_{t+1}^2 = r_{t+1} K_{t+1} + p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] + q_{t+1} X_{t+1},$$

$$r_{t+1} K_{t+1} = c_{t+1}^2 - p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] - q_{t+1} X_{t+1},$$

$$K_{t+1} = \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] - \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} X_{t+1}.$$

Dieses Ergebnis wird in die Budgetbeschränkung (1.31) der Periode t eingesetzt:

$$p_t R_{t+1} + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] - \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} X_{t+1} = w_t.$$

Um die Optimierungsbedingungen für die Haushalte zu erhalten, wird die folgende Lagrangefunktion aufgestellt (siehe Appendix 5.1.6).

$$L = \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t [w_t - p_t R_{t+1} - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] + \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} X_{t+1}]. \quad (1.34)$$

Es ergeben sich folgende Optimierungsbedingungen:

$$p_{t+1} = q_{t+1} \quad (1.35)$$

$$\beta c_t^1 = \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} \quad (1.36)$$

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} [1 + g'(R_{t+1})] = r_{t+1} \quad (1.37)$$

(1.35)-(1.37) zeigen, dass sich durch die Annahme von „end-of-period“ Ressourcenbestandsmärkten die Optimierungsbedingungen der Haushalte nur leicht ändern.

Die intertemporale Budgetbeschränkung nimmt folgende Form an.

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \quad (1.38)$$

Daraus ergibt sich das Konsumlevel für die Aktivperiode.

$$c_t^1 = \frac{1}{(1+\beta)} \left\{ w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \right\} \quad (1.39)$$

Aus (1.37) ergibt sich $\frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} = \frac{p_t}{(1+g'(R_{t+1}))}$ und somit folgt:

$$c_t^1 = \frac{1}{(1+\beta)} \left\{ w_t + \frac{p_t}{(1+g'(R_{t+1}))} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \right\}.$$

Nach Einsetzen der Profitmaximierungsbedingungen (1.16)-(1.18) ergibt sich:

$$c_t^1 = \gamma \left\{ \alpha_2 Y_t + \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t (1+g'(R_{t+1}))} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \right\}. \quad (1.40)$$

Aus (1.32) ergibt sich der Konsum für die Althaushalte c_t^2 , wenn die Periode um eine Einheit zurück verschoben wird, also von $t+1$ auf t .

$$c_t^2 = r_t K_t + q_t R_{t+1} + q_t X_t \quad (1.41)$$

Aus (1.25) ist bekannt, dass $p_t = q_t$ und aus (1.33) kann R_{t+1} hergeleitet werden. Somit ergibt sich:

$$c_t^2 = r_t K_t + q_t (R_t + g(R_t) - X_t + X_t),$$

$$c_t^2 = r_t K_t + q_t (R_t + g(R_t)).$$

Nach Einsetzen der Profitmaximierungsbedingungen (1.16)-(1.18) ergibt sich:

$$c_t^2 = \alpha_3 Y_t + \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} [R_t + g(R_t)],$$

In der Klammer wird um $g'(R_t)R_t - g'(R_t)R_t$ erweitert.

$$c_t^2 = \alpha_3 Y_t + \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} [R_t + g(R_t) + g'(R_t)R_t - g'(R_t)R_t],$$

$$c_t^2 = \alpha_3 Y_t + \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} [g(R_t) - g'(R_t)R_t + R_t + g'(R_t)R_t],$$

$$c_t^2 = \alpha_3 Y_t + \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} \left\{ \left[\frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t) \right] R_t + [1 + g'(R_t)] R_t \right\}.$$

c_t^1 und c_t^2 werden in die Räumungsbedingung des Gütermarkts (1.23) eingesetzt:

$$(X_t)^{\alpha_1} (K_t)^{\alpha_3} = \gamma \left\{ \alpha_2 Y_t + \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t (1 + g'(R_{t+1}))} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \right\} + \alpha_3 Y_t + \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} \left\{ \left[\frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t) \right] R_t + [1 + g'(R_t)] R_t \right\} + K_{t+1},$$

Da $Y_t = (X_t)^{\alpha_1} (K_t)^{\alpha_3}$ folgt:

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \left\{ \alpha_2 Y_t + \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t (1 + g'(R_{t+1}))} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \right\} - \alpha_3 Y_t - \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} \left\{ \left[\frac{g(R_t)}{R_t} - g'(R_t) \right] R_t + [1 + g'(R_t)] R_t \right\},$$

Da $K_{t+1} = \alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1 + g'(R_{t+1})} \right] \left(\frac{Y_t}{X_t} \right)$, folgt:

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1 + g'(R_{t+1})} \right] \left(\frac{Y_t}{X_t} \right) = Y_t - \gamma \left\{ \alpha_2 Y_t - \frac{\gamma \alpha_1 Y_t}{X_t (1 + g'(R_{t+1}))} \Phi(R_{t+1}) R_{t+1} \right\} - \alpha_3 Y_t - \alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} \left\{ \Phi(R_t) R_t + [1 + g'(R_t)] R_t \right\} \quad /* X_t,$$

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1 + g'(R_{t+1})} \right] = X_t - \gamma \left\{ \alpha_2 X_t - \frac{\gamma \alpha_1}{(1 + g'(R_{t+1}))} \Phi(R_{t+1}) R_{t+1} \right\} - \alpha_3 X_t - \alpha_1 \left\{ \Phi(R_t) R_t + [1 + g'(R_t)] R_t \right\} \quad /: \frac{\alpha_3}{1 + g'(R_{t+1})},$$

$$X_{t+1} = \frac{1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})] \{ X_t (\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t - \frac{\gamma\alpha_1}{(1+g'(R_{t+1}))} \Phi(R_{t+1}) R_{t+1} \},$$

Der vierte Term in der geschwungenen Klammer wird mit $\frac{1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})]$ multipliziert sich und es ergibt sich folgende Gleichgewichtsdynamik der Ressourcenernte:

$$X_{t+1} = \frac{1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})] \{ X_t (\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t \} - \alpha_1 \frac{1}{\alpha_3} \gamma \Phi(R_{t+1}) R_{t+1}. \quad (1.42)$$

Die Gleichung der Gleichgewichtsdynamik der Ressourcenernte nimmt also unter der Annahme eines Ressourcenhandels am Periodenende eine komplexere Form als jene unter Annahme eines Ressourcenhandels am Periodenanfang an. Dies hat aber keine grundlegenden Auswirkungen auf die Ergebnisse der Existenz und Stabilität von stationären Zuständen (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010; Farmer, 2000).

1.4 Ein log-lineares CD-OLG Modell ohne Kapital unter logistischer Regeneration

Im Vergleich zum CD-OLG Modell mit Kapital, sollen nun die Optimierungsbedingungen der Haushalte und Marktträumungsbedingungen in einem Modell ohne Kapital hergeleitet werden und daraus resultierende Unterschiede aufgezeigt werden. Als Grundlage dafür dient das OLG Modell nach Koskela et al. (2002). Auch hier leben die Agenten für 2 Perioden. Die junge Generation bietet eine Einheit an Arbeit an die Gut erzeugenden Firmen an, wofür sie einen Lohn w erhalten. Der Lohn wird für den Konsum des Gutes, für Sparen oder für den Kauf von der erneuerbaren Ressource verwendet. Die Firmen nutzen die geerntete erneuerbare Ressource und Arbeit, um ein Gut herzustellen. Die erneuerbare Ressource hat auch hier 2 Rollen. Sie dient einerseits als mögliche Vermögensanlage und als Input für die Produktion.

Es gibt Unterschiede auf dem Ressourcenmarkt im Gegensatz zum bisher verwendeten Modell. Am Anfang der Periode besitzt der alte Haushalt den Ressourcenstock und sie erhalten auch das Wachstum dieses Ressourcenstocks in

dieser Periode. Diesen Ressourcenstock $R_t + g(R_t)$ verkaufen sie an die Firmen. Diese entscheiden danach, welcher Teil von der Ressource geerntet wird und welcher Teil als Input in die Produktion fließt. Am Ende der Periode verkauft die Firma den verbleibenden Ressourcenstock an die jungen Haushalte. Der Ressourcenstock der folgenden Periode setzt sich also folgendermaßen zusammen:¹

$$R_{t+2} = R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}.$$

Die Ausgaben der Haushalte wenn sie jung sind, setzen sich neben dem Konsum c_t^1 aus der Ersparnis s_t und dem Ankauf der Ressource am Ende der Periode R_{t+1} zum Preis p_t , zusammen:

$$c_t^1 + p_t R_{t+1} + s_t = w_t.$$

Sind die Haushalte alt, erhalten sie neben dem Verkauf von der Ressource am Ende der Periode $R_t + g(R_t)$ zum Preis p_{t+1} auch die Einnahmen aus Sparen $r_{t+1}s_t$.

$$c_{t+1}^2 = p_{t+1}[R_{t+1} + g(R_{t+1})] + r_{t+1}s_t.$$

Um das Modell ohne Kapital nach Koskela et al (2002) mit dem im vorigen Kapitel dargestellten Modell vergleichbar zu machen, maximiert auch hier das Individuum eine log-lineare intertemporale Nutzenfunktion. Damit ergibt sich somit folgendes Optimierungsproblem.

$$\max \rightarrow \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$c_t^1 + p_t R_{t+1} + s_t = w_t, \tag{1.43}$$

$$c_{t+1}^2 = p_{t+1}[R_{t+1} + g(R_{t+1})] + r_{t+1}s_t. \tag{1.44}$$

Daraus ergibt sich folgende Lagrangefunktion:

$$L = \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t \left\{ w_t + \frac{p_{t+1}[R_{t+1} + g(R_{t+1})] - r_{t+1}p_t R_{t+1}}{r_{t+1}} - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} \right\}.$$

¹ Die Symbole im Modell nach Koskela et al (2002) wurden auf die Notation wie im Modell nach Farmer und Bednar-Friedl (2010) angepasst.

Durch die Ableitung dieser Funktion nach c_t^1 , c_{t+1}^2 und R_{t+1} ergeben sich folgende Optimierungsbedingungen für den Haushalt (siehe Appendix 5.1.7).

$$\frac{c_{t+1}^2}{\beta c_t^1} = r_{t+1} \quad (1.45)$$

(1.45) sagt, dass die Grenzrate der Substitution zwischen Gegenwarts- und Zukunftskonsum gleich dem Zinsfaktor ist.

Außerdem ergibt sich eine weitere Optimierungsbedingung, die die Form der Hotelling Rule (1.10) wie im Modell mit Kapital annimmt:

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} [1 + g'(R_{t+1})] = r_{t+1}. \quad (1.46)$$

Unter Verwendung dieser Bedingungen ergibt sich folgende intertemporale Budgetbeschränkung:

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1} [g(R_{t+1}) - g'(R_{t+1})R_{t+1}]}{r_{t+1}}. \quad (1.47)$$

(1.47) weist mit Ausnahme der Zeitindizes im zweiten Term auf der rechten Seite große Ähnlichkeit mit (1.12) auf. Andererseits verkompliziert die Zeitverzögerung in (1.47) im Vergleich zu (1.12) die Analyse der Gleichgewichtsdynamik. Deshalb wird anschließend die Gleichgewichtsdynamik des einfacheren „beginning-of-period“ Modells mit Kapital aus 1.2 analysiert.

2. Existenz und Stabilität stationärer Zustände im log-linearen CD OLG Modell mit Kapital

2.1 Existenz stationärer Zustände

Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, unter welchen Bedingungen stationäre Zustände von Ressourcenstock und Ressourcenernte existieren. Da produziert Kapital in den Gleichgewichtsdynamiken von Ressourcenernte und Ressourcenstock nicht vorkommen, werden zur Untersuchung der Existenz von stationären Zuständen von Ressourcenstock und Ressourcenernte die Gleichgewichtsdynamiken (1.27) und (1.28) aus dem Modell mit Kapital aus dem ersten Abschnitt herangezogen. Stationäre Zustände der Gleichgewichtsdynamiken von Ressourcenstock und Ressourcenernte existieren, wenn $X_{t+1} = X_t = X$ und $R_{t+1} = R_t = R$, wenn t gegen unendlich strebt. Unter der Annahme, dass $g(0) = 0$ existiert ein trivialer stationärer Zustand von Ressourcenstock und Ressourcenernte mit $(X, R) = (0, 0)$. Es existiert ein nicht-trivialer stationärer Zustand, welcher durch die Gleichungen (2.1) und (2.2) definiert ist.

$$X = g(R) \quad (2.1)$$

$$[1 + g'(R)] = \frac{\alpha_3 X}{\{X(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R) R - \alpha_1 [1 + g'(R)] R\}} \quad (2.2)$$

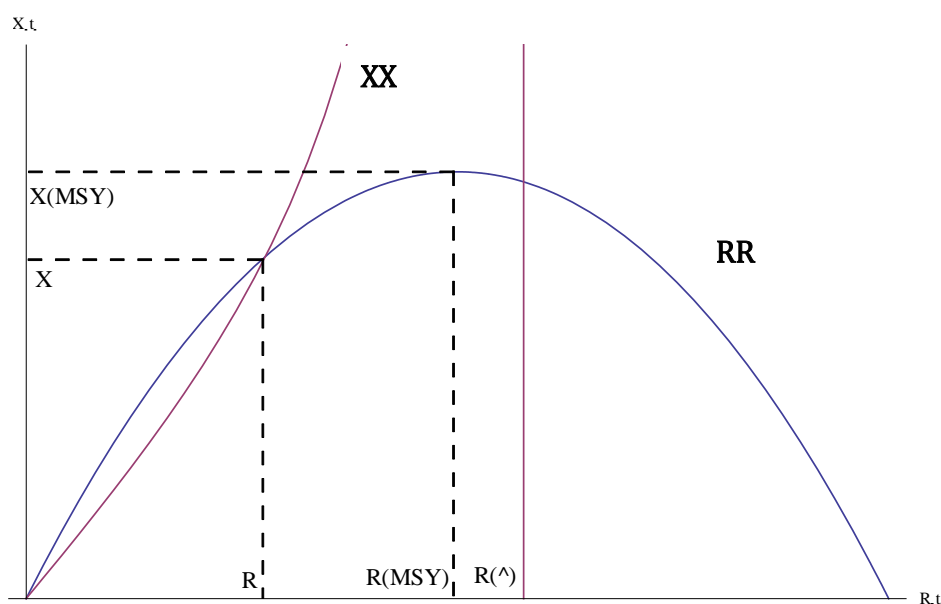


Abbildung 3: RR- und XX- Kurve mit den stationären Zuständen $R < R^{MSY}$ und $X < X^{MSY}$ (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 5.5.3)

Die beiden Funktionen (2.1) und (2.2) definieren zwei Kurven im Raum RX , auf denen der Ressourcenstock und die Ressourcenernte zeitlich stationär bleiben. Die beiden Kurven werden in Abbildung 3 dargestellt. Die erste Funktion stellt die RR-Kurve dar, welche die Regenerationskurve wiedergibt. Auf dieser Kurve bleibt also der Ressourcenstock zeitlich stationär. Die Steigung der Kurve hängt davon ab, ob sich der stationäre Zustand des Ressourcenstocks unter oder oberhalb jenes Ressourcenstocklevels liegt, wo das Erntevolumen der natürlichen Regeneration gleicht (R_{MSY}). Die XX-Kurve wird durch die zweite Funktion dargestellt und auf dieser bleibt die Ressourcenernte zeitlich stationär. Um diese beiden Kurven veranschaulichen zu können, werden bestimmte Werte für die Parameter der Nutzen-, Produktions- und natürlichen Wachstumsfunktion bestimmt. Der Ressourcenstock akkumuliert unter der RR-Kurve, während die Ernte des Ressourcenstocks oberhalb der XX-Kurve steigt.

Um die Existenz des nicht-trivialen stationären Zustands prüfen zu können, wird Gleichung (2.2) nach X umgeformt, wobei gelten muss, dass $1+g'(R) > 0$ ist.

$$X(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \alpha_1\gamma\Phi(R)R - \alpha_1[1 + g'(R)]R = \frac{\alpha_3 X}{[1+g'(R)]}$$

$$X(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \frac{\alpha_3 X}{[1+g'(R)]} = +\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]R,$$

$$X \left[(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \frac{\alpha_3}{[1+g'(R)]} \right] = +\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]R,$$

$$X \left[\frac{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1+g'(R)] - \alpha_3}{[1+g'(R)]} \right] = +\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]R,$$

$$\mathbf{X} = \frac{[1+g'(R)]\{+\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]\}}{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1+g'(R)] - \alpha_3} \equiv \mathbf{f(R)}. \quad (2.3)$$

Ein nicht trivialer stationärer Zustand existiert, wenn der Ressourcenstock zwischen 0 und dem maximalen Ressourcenstock liegt und wenn $f(R) = g(R)$, das heißt, wenn sich die beiden Kurven schneiden. Um die erforderlichen Bedingungen für die Existenz eines einzigen positiven stationären Zustandes herzuleiten, ist die Überprüfung der Steigungen der RR- und XX-Kurve notwendig.

$$\frac{dX}{dR (R_{t+1}=R_t)} = g'(R) \quad (2.4)$$

Um die Steigung der XX-Kurve zu erhalten, wird das totale Differential der folgenden Funktion gebildet:

$$X = \frac{[1+g'(R)]\{\alpha_1\gamma\Phi(R)R+\alpha_1[1+g'(R)]\}}{(\alpha_1+\sigma\alpha_2)[1+g'(R)]-\alpha_3} \equiv f(R) \text{ bzw.}$$

$$X\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\} = [1 + g'(R)]\{\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]\}.$$

Totale Differentiation ergibt:

$$\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}dX + g''(R)(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)X dR = \alpha_1 g''(R)\{\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]\}dR + \alpha_1[1 + g'(R)]\{\gamma g'(R) - \gamma g'(R) - \gamma g''(R)R + [1 + g'(R)] + g''(R)R\}dR,$$

bzw.

$$\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}dX + g''(R)(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)X dR = \alpha_1 g''(R)\{\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]\}dR + \alpha_1[1 + g'(R)]\{g''(R)R[1 - \gamma] + [1 + g'(R)]\}dR.,$$

Der Ausdruck $\alpha_1\gamma\Phi(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]$ wird durch $X\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \frac{\alpha_3}{[1+g'(R)]}\}$ ersetzt.

Dieser Term wird durch Umformung der Gleichung (2.2) erhalten.

$$\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}dX + g''(R)(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)X dR = g''(R)X\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \frac{\alpha_3}{[1+g'(R)]}\} dR + \alpha_1[1 + g'(R)]\{g''(R)R[1 - \gamma] + [1 + g'(R)]\}dR ,$$

Aus (2.1) ist bekannt, dass $g(R)=X$.

$$\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}dX = -g''(R)g(R)(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) dR + g''(R)g(R)\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \frac{\alpha_3}{[1+g'(R)]}\} dR + \alpha_1[1 + g'(R)]\{\sigma g''(R)R + [1 + g'(R)]\}dR ,$$

$g''(R)g(R)$ wird herausgehoben und es ergibt sich:

$$\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}dX = g''(R)g(R)\{-(\alpha_1 + \sigma\alpha_2) + (\alpha_1 + \sigma\alpha_2) - \frac{\alpha_3}{[1+g'(R)]}\} dR + \alpha_1[1 + g'(R)]\{\sigma g''(R)R + [1 + g'(R)]\}dR ,$$

$$\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}dX = -g''(R)g(R) \frac{\alpha_3}{[1+g'(R)]} dR + \alpha_1[1 + g'(R)]\{\sigma g''(R)R + [1 + g'(R)]\}dR /: \{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\} , : dR,$$

$$\frac{dX}{dR (X_{t+1}=X_t)} = \frac{\alpha_1 [1+g'(R)] \{1+g'(R) + \sigma g''(R)R\} - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]}}{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1+g'(R)] - \alpha_3} \quad (2.5)$$

Mit Hilfe dieser Steigungen können die Bedingungen für die Existenz eines nicht-trivialen stationären Zustands angegeben werden. Wenn $\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{dX}{dR (R_{t+1}=R_t)} - \frac{dX}{dR (X_{t+1}=X_t)} \right] > 0$, existiert nur eine nicht-triviale Lösung von R zwischen 0 und R_{\max} mit $g(R)=f(R)$. Im Modell mit logistischer Regenerationsfunktion muss also gelten:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{dX}{dR (R_{t+1}=R_t)} - \frac{dX}{dR (X_{t+1}=X_t)} \right] &= g'(0) - \frac{\alpha_1 [1+g'(0)] \{1+g'(0) + \sigma g''(0)0\} - \alpha_3 \frac{g''(0)g(0)}{[1+g'(0)]}}{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1+g'(0)] - \alpha_3} \\ &= g'(0) - \frac{\alpha_1 [1+g'(0)]^2}{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1+g'(0)] - \alpha_3} > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Im Bereich um den Ursprung muss also die Steigung der Regenerationsfunktion größer als jene der XX -Kurve sein. Der natürliche Zuwachs muss also in diesem Bereich größer als die Nachfrage der Wirtschaft nach der Ressource als Produktionsinput sein. Anders könnte die Wirtschaft nicht in Gang kommen.

Um die Existenz eines nicht-trivialen stationären Zustands zu beweisen, wird ein bestimmter Maximalwert für den Ressourcenstock bestimmt. Dieser hat die Eigenschaft, dass wenn der Ressourcenstock gegen diesen Wert strebt die Ressourcenernte gegen unendlich strebt. In Abbildung 4 ist ersichtlich, dass sich die XX -Kurve am Wert \hat{R} gegen plus Unendlich strebt,

$$\hat{R} = \frac{1}{g'(R)} \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma} - 1, \quad g''(R) < 0. \quad (2.7)$$

Da $g(R)$ strikt konkav ist, ist der durchschnittliche Ertrag größer als der Grenzertrag und somit ist $\Phi(R)$ positiv für alle positiven R . Da $1 + g'(R) > 0$, ist der Zähler in der Funktion für die XX -Kurve positiv. Liegt R zwischen 0 und \hat{R} und gilt $(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] > \alpha_3$ im Nenner, so ist $f(R)$ positiv. Strebt nun der Ressourcenstock gegen \hat{R} , strebt die XX -Kurve gegen unendlich. Weil $g(R)$ beschränkt ist, muss ein $\varepsilon > 0$ existieren, sodass $f(\hat{R} - \varepsilon) - (\hat{R} - \varepsilon) > 0$. Es gilt zu zeigen, dass $g(R) - f(R) = 0$. Aus der Existenzbedingung geht jedoch hervor, dass es ein ε geben muss, für das $f(R) -$

$g(R) > 0$ ist für alle $R \in B_\epsilon(0)$, wobei $B_\epsilon(0)$ eine ϵ -Umgebung des Ursprungs in der Abbildung 3 ist. Der Zwischenwertsatz sichert, dass ein $R \in [0, \hat{R}]$ existieren muss, sodass die Differenz zwischen $f(R)$ und $g(R)$ null ist. Es gilt somit $f(R) = g(R)$ und $X = f(R) = g(R) \leq R + g(R)$ für alle positiven R . Dieser stationäre Zustand erfüllt also die obere Schranke für X , welche in (1.26) definiert wurde.

Um die Einzigartigkeit des stationären Zustands zu überprüfen, muss nachgewiesen werden, dass die XX - und RR -Kurve monoton sind. Wie in der Graphik ersichtlich ist, ist die RR -Kurve im Intervall $[0, R_{MSY}]$ monoton steigend und im Intervall $[R_{MSY}, R_{max}]$ monoton fallend. Um zu zeigen, dass die XX -Kurve monoton ist, wird die XX -Kurve und ihre Ableitung verglichen. Beide haben den gleichen Nenner und somit kann davon ausgegangen werden, dass wenn $\lim_{R \rightarrow \hat{R}} f(R) = +\infty$, auch $\lim_{R \rightarrow \hat{R}} f'(R) = +\infty$ gilt, da \hat{R} den Nenner nach Null gehen lässt. Wie in der Existenzbedingung vorausgesetzt ist, ist $(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] > \alpha_3$, was den Nenner der Ableitung $f'(R)$ positiv macht. Auch der Zähler bleibt positiv für alle $R < \hat{R}$ da alle Terme außer $\sigma g''(R)R$ positiv sind, wobei dieser Ausdruck kleiner wird für $R \leq \hat{R} - \epsilon$, $\epsilon > 0$ wenn die dritte Ableitung von $g(R)$ positiv ist, was für die logistische Regenerationsfunktion zutrifft.

$$g(R_t) = \pi R_t - \Omega R_t^2, g'(R_t) = \pi - 2\Omega R_t, g''(R_t) = 2\Omega, g'''(R_t) = 0 \geq 0$$

$f(R)$ ist also monoton für alle R im Intervall $[0, \hat{R}]$. Da gezeigt werden konnte, dass die RR -Kurve abschnittsweise und die XX -Kurve im Definitionsbereich monoton sind, ist die Einzigartigkeit des nicht-trivialen stationären Zustands bewiesen.

Wie in Abbildung 4 ersichtlich wird, existieren zwei stationäre Zustände, ein trivialer im Ursprung und ein nicht-trivialer im Schnittpunkt der RR - und XX -Kurve. In Abbildung 3 schneiden sich die RR -Kurve und die XX -Kurve im Bereich wo die RR -Kurve steigt und somit der stationäre Zustand des Ressourcenstocks eine positive Eigenertragsrate aufweist. Im Gegensatz dazu schneiden sich die beiden Kurven in Abbildung 3 im Bereich einer negativen Eigenertragsrate des Ressourcenstocks. Beide Fälle erfüllen aber die Existenzbedingung für den nicht-trivialen stationären Zustand. Damit neben dem trivialen auch ein nicht-trivialer stationärer Zustand existiert, muss das Wachstumspotential der Ressource im Ursprung, also die Steigung der RR -Kurve, größer sein als das Wachstum der Nachfrage nach der

Ressource als Produktionsinput. Der positiven Steigung der XX-Kurve zufolge hängt diese Nachfrage für nachhaltige Ressourcenernte positiv vom Ressourcenstock im allgemeinen Gleichgewicht ab. Die Konsumnachfrage der Haushalte nach dem produzierten Gut steigt mit der Nachfrage nach der Ressource als Produktionsinput. Außerdem führt ein höherer Bestand vom natürlichem Kapital und Investitionen in produziertes Kapital zu mehr natürlichem Produktionsinput. (vgl. Farmer und Bednar Friedl, 2010, S. 123-126)

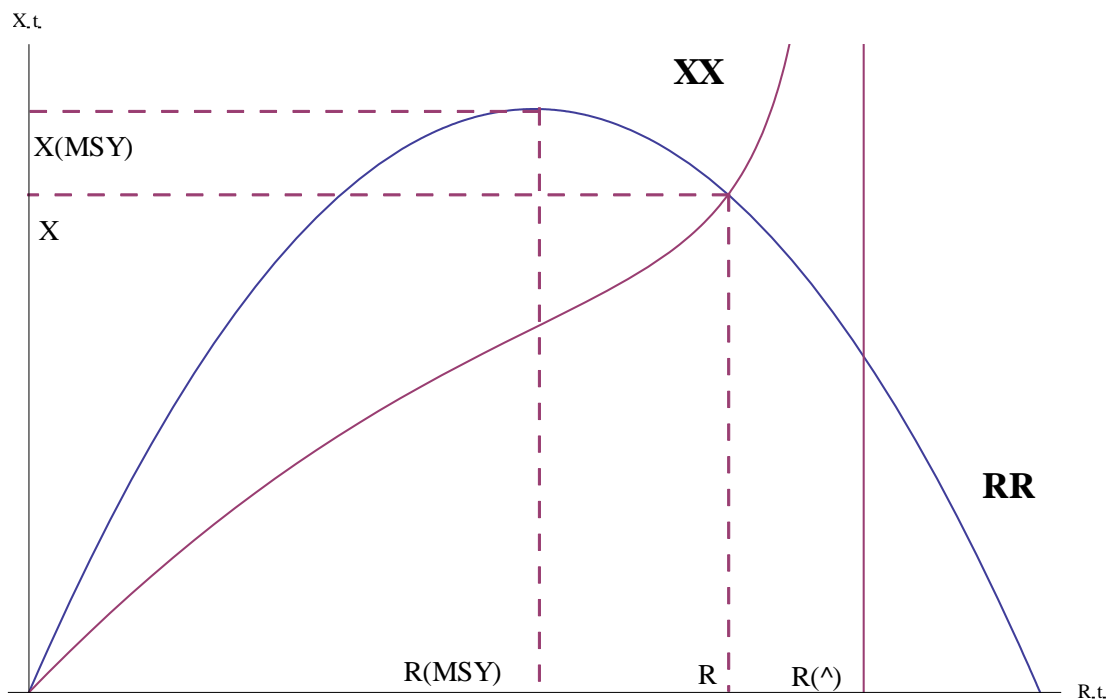


Abbildung 4: RR- und XX- Kurve mit den stationären Zuständen $R > R^{MSY}$ und $X < X^{MSY}$ (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 6.3.2)

2.2 Stabilität der stationären Zustände

Nachdem die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen stationären Zustands bewiesen wurde, werden in diesem Abschnitt die Stabilität von beiden stationären Zuständen hinterfragt. Um die Stabilität der stationären Zustände zu überprüfen, werden die Stabilitätskriterien von Galor (1992) herangezogen. Sind die Diskriminante und die Determinante der Jacobi Matrix beim trivialen stationären Zustand strikt positiv, ist die Spur größer als zwei und wenn $1 - \text{tr}J(0,0) + \det J(0,0) > 0$, dann sind beide Eigenwerte größer als eins, was bedeutet, dass die

Gleichgewichtsdynamik von Ressourcenstock und Ressourcenernte asymptotisch instabil ist.

Die Spur einer quadratischen Matrix wird definiert als Summe der Elemente der Hauptdiagonale der Matrix. Die Determinante dieser Jacobi Matrix ist definiert als:

$$\det A = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad , \quad \text{die Diskriminante als: } \Delta J(X, R) \equiv (J_{11} - (1 + g'(R))^2 - 4 * J_{12} . \text{ Daraus können die Eigenwerte berechnet werden: } \Psi_{1,2} = \text{tr}J(X, R) \mp \sqrt{\Delta J(X, R)} .$$

Um die Stabilitätskriterien zu bestimmen, müssen also zuerst die Eigenwerte der Jacobi Matrix an den stationären Zuständen $J(X, R)$ errechnet werden. Diese Matrix wird folgendermaßen definiert.

$$J(X, R) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} & \frac{\partial X_{t+1}}{\partial R_t} \\ \frac{\partial R_{t+1}}{\partial X_t} & \frac{\partial R_{t+1}}{\partial R_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Es müssen also die Bewegungsgleichungen für Ressourcenernte (1.27) und Ressourcenbestand (1.28) jeweils nach den Variablen X_t und R_t abgeleitet werden. Dabei ergeben sich folgende Elemente der Jacobi Matrix (siehe Appendix 5.2.1):

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} = -g''(R) \left[\frac{g(R)}{1+g'(R)} \right] + \alpha_3^{-1} [1 + g'(R)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) > 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial R_t} = g(R)g''(R) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ 1 + g'(R) + \sigma g''(R)R \}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial R_{t+1}}{\partial X_t} = -1, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial R_{t+1}}{\partial R_t} = 1 + g'(R) > 0. \quad (2.13)$$

2.2.1 Instabilität des trivialen stationären Zustandes

Um die Stabilität des trivialen stationären Zustandes zu ermitteln, werden Spur, Determinante und Diskriminante der Gleichgewichtsdynamiken von Ressourcenstock und Ressourcenernte am trivialen stationären Zustand bestimmt (siehe Appendix 5.2.2).

$$\text{tr}J(0,0) = \alpha_3^{-1}[1 + g'(0)](\alpha_1 + \alpha_2\sigma) + 1 + g'(0) > 2 \quad (2.14)$$

$$\det J(0,0) = \frac{\alpha_2\sigma}{\alpha_3}[1 + g'(0)]^2 > 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta J(X, R) &= \text{tr}J(X, R)^2 - 4\det J(X, R) \\ &= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \{(\alpha_3 - \alpha_2\sigma)^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1(\alpha_3 + \alpha_2\sigma)\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Abschließend muss gezeigt werden, dass $1 - \text{tr}J(0,0) + \det J(0,0)$ größer als Null ist (siehe Appendix 5.2.3).

$$1 - \text{tr}J(0,0) + \det J(0,0) = 1 - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2\sigma)}{\alpha_3} [1 + g'(0)] - 1 - g'(0) + \frac{\alpha_2\sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_3 + \alpha_2\sigma[1 + g'(0)]^2 > [1 + g'(0)](\alpha_1 + \alpha_2\sigma + \alpha_3) \quad (2.17)$$

Dies entspricht genau der Existenzbedingung für einen trivialen stationären Zustand (2.6). Aus (2.14)-(2.17) wird also ersichtlich, dass der triviale stationäre Zustand der Gleichgewichtsdynamik von Ressourcenernte (1.27) und von Ressourcenstock (1.28) asymptotisch instabil ist.

2.2.2 Stabilität des nicht-trivialen stationären Zustands

Sind Spur, Determinante und Diskriminante der Jacobi Matrix strikt positiv und $1 - \text{tr}J(0,0) + \det J(0,0)$ kleiner als Null, so ist der erste Eigenwert größer als 1 und der zweite Eigenwert liegt zwischen 0 und 1 (vgl. Galor, 1992).

$$\text{tr}J(X, R) = -g''(R) \left[\frac{g(R)}{1+g'(R)} \right] + [1 + g'(R)] \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2\sigma + \alpha_3}{\alpha_3} \right) > 0 \quad (2.18)$$

$$\det J(X, R) = \frac{\alpha_2\sigma[1+g'(R)]^2}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1[1+g'(R)]\sigma g''(R)R}{\alpha_3} > 0 \quad (2.19)$$

Die Eigenwerte der Jacobi Matrix am nicht-trivialen stationären Zustand sind eindeutig und reell, wenn die Diskriminante der Jacobi Matrix positiv ist. Die Diskriminante der Jacobi Matrix ist folgendermaßen definiert:

$$\Delta J(X, R) \equiv (J_{11} - (1 + g'(R)))^2 - 4 * J_{12}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[1+g'(R)]^2} \left\{ -g''(R)g(R) + [1 + g'(R)]^2 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma + \alpha_3}{\alpha_3} \right) \right\}^2 - 4 g''(R)g(R) \\
&+ 4[1 + g'(R)] \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) [1 + g'(R) + g''(R)R] \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Damit der gesamte Ausdruck positiv ist, muss J_{12} kleiner als 0 sein. $J_{12} < 0$ ist gleichbedeutend damit, dass der Zähler von (2.5) positiv ist:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 [1 + g'(R)] \{1 + g'(R) + \sigma g''(R)R\} - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} > 0, \\
&-\alpha_1 [1 + g'(R)] \{1 + g'(R) + \sigma g''(R)R\} + \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} < 0, \\
&-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{1 + g'(R) + \sigma g''(R)R\} + \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} < 0, \\
&-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)]^2 \{1 + g'(R) + \sigma g''(R)R\} + g''(R)g(R) < 0.
\end{aligned}$$

Dass der Zähler von (2.5) positiv ist, wurde bereits beim Beweis der Eindeutigkeit des nicht-trivialen stationären Zustands gezeigt.

Um zu zeigen, dass $1 - \text{tr}J(X, R) + \det J(X, R)$ kleiner als Null ist, werden die Ableitungen der RR-Kurve (2.4) und der XX-Kurve (2.5) verwendet. Es lässt sich zeigen, dass wenn die Steigung der XX-Kurve größer ist als die RR-Kurve, die Bedingung $1 - \text{tr}J(X, R) + \det J(X, R) < 0$ gilt.

$$1 - \text{tr}J(X, R) + \det J(X, R) < 0$$

$$1 + g''(R) \left[\frac{g(R)}{1+g'(R)} \right] - [1 + g'(R)] \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma + \alpha_3}{\alpha_3} \right) + \frac{\alpha_2 \sigma [1+g'(R)]^2}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1 [1+g'(R)] \sigma g''(R)R}{\alpha_3} < 0 \tag{2.21}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{dX}{dR (X_{t+1}=X_t)} > \frac{dX}{dR (R_{t+1}=R_t)}$$

$$\frac{\alpha_1 [1+g'(R)] \{1+g'(R) + \sigma g''(R)R\} - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]}}{(\alpha_1 + \sigma \alpha_2) [1+g'(R)] - \alpha_3} > g'(R),$$

$$\alpha_1 [1 + g'(R)] \{1 + g'(R) + \sigma g''(R)R\} - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} > g'(R) \{(\alpha_1 + \sigma \alpha_2) [1 + g'(R)] - \alpha_3\},$$

$$\alpha_1 [1 + g'(R)]^2 + \alpha_1 \sigma [1 + g'(R)] g''(R)R - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} > g'(R) \{(\alpha_1 + \sigma \alpha_2) [1 + g'(R)] - \alpha_3\}.$$

Auf beiden Seiten wird der Term $\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}$ addiert und auf der rechten Seite zugleich herausgehoben.

$$\begin{aligned}
& \{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\} - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} + \alpha_1\sigma[1 + g'(R)]g''(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]^2 > \\
& [1 + g'(R)]\{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3\}, \\
& = (\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \alpha_3 - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} + \alpha_1\sigma[1 + g'(R)]g''(R)R + \alpha_1[1 + g'(R)]^2 > \\
& (\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)]^2 - \alpha_3[1 + g'(R)], \\
& = -(\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)]^2 + \alpha_1[1 + g'(R)]^2 + \alpha_3[1 + g'(R)] + (\alpha_1 + \sigma\alpha_2)[1 + g'(R)] - \\
& \alpha_3 - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} + \alpha_1\sigma[1 + g'(R)]g''(R)R > 0, \\
& = (-\alpha_1 - \sigma\alpha_2 + \alpha_1)[1 + g'(R)]^2 + [1 + g'(R)](\alpha_1 + \sigma\alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_3 - \\
& \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} + \alpha_1\sigma[1 + g'(R)]g''(R)R > 0, \\
& = -\sigma\alpha_2[1 + g'(R)]^2 + [1 + g'(R)](\alpha_1 + \sigma\alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_3 - \alpha_3 \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} + \alpha_1\sigma[1 + \\
& g'(R)]g''(R)R > 0,
\end{aligned}$$

Als Letztes wird die gesamte Ungleichung durch α_3 dividiert und mit -1 multipliziert, wodurch sich das Ungleichheitszeichen umdreht.

$$\frac{\sigma\alpha_2}{\alpha_3} [1 + g'(R)]^2 + \frac{(\alpha_1 + \sigma\alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_3} [1 + g'(R)] + 1 + \frac{g''(R)g(R)}{[1+g'(R)]} - \frac{\alpha_1\sigma}{\alpha_3} g''(R)[1 + g'(R)]R < 0. \quad (2.22)$$

Die Ungleichung nimmt genau die Form der Ungleichung (2.21) an, was bedeutet, dass die Bedingung $1 - \text{tr}J(X, R) + \det J(X, R) < 0$ erfüllt ist, wenn die Steigung der XX-Kurve größer ist als jene der RR-Kurve. Daraus folgt, dass der nicht triviale stationäre Zustand stabil ist, wenn die XX-Kurve die RR-Kurve von unten schneidet wie in Abbildung 2. Da die Steigung der XX-Kurve über den gesamten XR-Raum positiv ist, ist dies immer der Fall, wenn die Steigung der RR-Kurve negativ ist (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S. 127-129).

2.3 Sattelpfade, die sich dem nicht-trivialen stationären Zustand annähern

Eine lineare Approximation der Gleichgewichtsdynamik im stationären Gleichgewicht, also dem Sattelpunkt (X, R) , lautet:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ R_{t+1} \end{pmatrix} = J(X, R) \begin{pmatrix} X_t \\ R_t \end{pmatrix} + (I - J(X, R)) \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Die Lösung dieses linearen Differenzgleichungssystem lautet:

$$X_t = X + \kappa_1 e_{X_1} \Psi_1^t + \kappa_2 e_{X_2} \Psi_2^t, \quad (2.24)$$

$$R_t = R + \kappa_1 e_{R_1} \Psi_1^t + \kappa_2 e_{R_2} \Psi_2^t. \quad (2.25)$$

Damit die Gleichgewichtsdynamiken asymptotisch stabil bleiben, müssten Ψ_1^t und Ψ_2^t zwischen 0 und 1 liegen. Wäre ein Eigenwert größer als 1, würden die Gleichgewichtsdynamiken „explodieren“ wenn t gegen ∞ strebt. Ist also $\Psi_1^t > 1$, was für die Stabilität des nicht-trivialen stationären Zustands in Kapitel 2.2.2 bewiesen wurde und strebt t gegen ∞ , so strebt auch der Eigenwert Ψ_1^t gegen unendlich. Deshalb muss dieser Eigenwert vernachlässigt werden, indem κ_1 gleich Null gesetzt wird. Diese Vernachlässigung impliziert, dass die Gleichgewichtsdynamiken nur sattelpfad stabil sind. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$X_t = X + \kappa_X \Psi_2^t, \quad (2.26)$$

$$R_t = R + \kappa_R \Psi_2^t \quad (2.27)$$

mit $\kappa \neq 0$.

$\begin{pmatrix} e_X \\ e_R \end{pmatrix}$ ist die Lösung folgender Matrixgleichung:

$$M\tilde{A} = \Psi\tilde{A} \text{ mit } M \equiv J(X, R) \text{ und } \tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} e_X \\ e_R \end{pmatrix}.$$

$$(J(X, R)) \begin{pmatrix} e_X \\ e_R \end{pmatrix} = \Psi_2 \begin{pmatrix} e_X \\ e_R \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_X \\ e_R \end{pmatrix} = \Psi_2 \begin{pmatrix} e_X \\ e_R \end{pmatrix},$$

(vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S. 109)

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$J_{11}e_X + J_{12}e_R = \Psi_2 e_X, \quad (2.29)$$

$$J_{21}e_X + J_{22}e_R = \Psi_2 e_R. \quad (2.30)$$

e_R wird auf 1 festgesetzt und (2.29) und (2.30) wird zu:

$$J_{11}e_X + J_{12} = \Psi_2 e_X, \quad (2.31)$$

$$J_{21}e_X + J_{22} = \Psi_2. \quad (2.32)$$

Aus (2.12) ist bekannt, dass $J_{21} = -1$ ist:

$$J_{11}e_X + J_{12} = \Psi_2 e_X,$$

$$-e_x + J_{22} = \Psi_2 \quad \rightarrow \quad e_x = J_{22} - \Psi_2. \quad (2.34)$$

Die Lösung von () nimmt daher folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{22}(X, R) - \Psi_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Betrachtet man (2.27) zum Zeitpunkt Null lautet die Gleichung für R_0 :

$$R_0 = R + \kappa e_R(\Psi_2)^0.$$

Da $e_R = 1$ folgt:

$$R_0 = R + \kappa,$$

$$\kappa = R_0 - R. \quad (2.36)$$

(2.25) und (2.36) werden in (2.26) und (2.27) ersetzt:

$$X_t = X + (R_0 - R)(j_{22} - \Psi_2)(\Psi_2)^t,$$

$$R_t = R + (R_0 - R)(\Psi_2)^t \text{ mit } e_R = 1.$$

Um den Ressourcenstock der Folgeperiode $t+1$ zu erhalten, wird (2.38) um eine Periode nach vor verschoben:

$$R_{t+1} = R + (R_0 - R)(\Psi_2)^{t+1}.$$

Die Veränderung des Ressourcenstock in den beiden Perioden erhält man, indem von R_{t+1} R_t abgezogen wird:

$$R_{t+1} - R_t = R + (R_0 - R)(\Psi_2)^{t+1} - R - (R_0 - R)(\Psi_2)^t, \quad (2.39)$$

$$R_{t+1} - R_t = (R_0 - R)(\Psi_2)^{t+1} - (R_0 - R)(\Psi_2)^t.$$

Nach dem Herausheben von Ψ_2^t ergibt sich:

$$R_{t+1} - R_t = (\Psi_2)^t [(R_0 - R)\Psi_2 - (R_0 - R)],$$

$$(\Psi_2)^t = \frac{R_{t+1} - R_t}{[(R_0 - R)\Psi_2 - (R_0 - R)]}. \quad (2.40)$$

(2.40) wird in Gleichung (2.38) eingesetzt:

$$R_t = R + (R_0 - R) \frac{R_{t+1} - R_t}{[(R_0 - R)\Psi_2 - (R_0 - R)]},$$

$$R_t = R + \cancel{(R_0 - R)} \frac{R_{t+1} - R_t}{(R_0 - R)(\Psi_2 - 1)}.$$

Danach wird auf gemeinsamen Nenner gebracht:

$$(\Psi_2 - 1)R_t = (\Psi_2 - 1)R + R_{t+1} - R_t,$$

$$R_{t+1} = (\Psi_2 - 1)R_t + R_t - (\Psi_2 - 1)R,$$

$$R_{t+1} = \Psi_2 R_t - R_t + R_t - (\Psi_2 - 1)R,$$

$$R_{t+1} = R(1 - \Psi_2) + \Psi_2 R_t, \text{ bei gegebenen } R_0 > 0.$$

Sind also $J_{22}(X, R)$ aus Gleichung (2.35) und Ψ_2 aus dem Beweis für die Stabilität des nicht-trivialen stationären Zustands im Kapitel 2.2.2 gegeben, so setzt sich die lineare Approximation der Gleichgewichtsdynamik von den Variablen der natürlichen Ressource am Sattelpunkt (X, R) , also im stationären Gleichgewicht von Ressourcenstock und Ressourcenernte, aus folgenden Gleichungen zusammen:

$$R_{t+1} = R(1 - \Psi_2) + \Psi_2 R_t, \text{ bei gegebenen } R_0 > 0 \quad (2.41)$$

$$X_t = X + (R_0 - R)(j_{22} - \Psi_2)(\Psi_2)^t, \quad (2.42)$$

$$K_{t+1} = \alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{(1 + g'(R_{t+1}))} \right] (X_t^{\alpha_1 - 1} K_t^{\alpha_3}), \text{ bei gegebenen } K_0 > 0. \quad (2.43)$$

Es gilt nun zu hinterfragen, ob eine Parameterkombination für dieses dynamische System existiert, die einerseits die Akkumulation von produziertem Kapital und andererseits zeitlich stationäre Stöcke der erneuerbaren Ressource ermöglicht. Dies kann zusammen mit individueller Optimierung der Haushalte und intertemporaler Marktträumung nur dann erreicht werden, wenn der Anfangsbestand der Ressource gleich dem stationären Bestand der Ressource ist, das heißt wenn $R_0 = R$. Wenn $R_0 \neq R$, würde intergenerationelle Ressourcengleichheit verlangen, dass Ψ_2 gleich 1 ist, was jedoch der Stabilität vom nicht-trivialen stationären Zustand in Kapitel 2.2.2 widerspricht (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S. 129-130).

3. Effizienz des intertemporalen Gleichgewichts

Intergenerationelle Effizienz kann im Sinne intergenerationaler Pareto-Optimalität (Page, 1997, S. 582) definiert werden. Das bedeutet, dass es eine Allokation intergenerational Pareto-optimal ist, wenn keine andere erreichbare Allokation existiert, welche den Nutzen von zumindest einem Haushalt erhöhen würde ohne den Nutzen eines anderen Haushalts egal welcher Generation zu mindern. Eine erreichbare Allokation ist also dann effizient, wenn es keine andere erreichbare Allokation gibt, für welche der Nutzen für die alte Generation größer oder gleich ist und für welche die Nutzen aller anderen Generationen strikt größer für zumindest eine Periode und zumindest gleich groß für alle Perioden sind (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S. 36).

Seit Diamond (1965) ist bekannt, dass im Allgemeinen intertemporale Marktgleichgewichte in OLG-Modellen in der langen Frist (= steady state) intergenerational ineffizient sind. Deshalb hat Zilka (1990) vorgeschlagen, intergenerational Effizienz in der kurzen und in der langen Frist zu untersuchen. Diesem Vorschlag wird hier gefolgt und zuerst intergenerational Effizienz in der kurzen Frist definiert, um danach die kurzfristige Effizienz des intertemporalen Marktgleichgewichts zu zeigen.

3.1 Effizienz des intertemporalen Gleichgewichts in der kurzen Frist

Um zu überprüfen, ob das in Kapitel 1 definierte intertemporale Marktgleichgewicht auch kurzfristig intergenerational effizient ist, muss gezeigt werden, dass die Bedingungen für dieses intertemporale Marktgleichgewicht die Bedingungen für kurzfristige intergenerational Effizienz implizieren. Dazu werden zuerst die Bedingungen für kurzfristige intergenerational Effizienz ermittelt. Eine Pareto-effiziente Lösung kann durch die Maximierung einer beliebig gewählten Generation unter der Bedingung, dass der Nutzen der anderen Generation auf dem optimalen Niveau bleibt, hergeleitet werden (Mas-Colell et al, 1995, S. 562).

3.1.1 First-Order-Conditions für kurzfristige Effizienz

Wie in Farmer und Bednar-Friedl (2010) wird der Nutzen der ältesten Generation maximiert und die Nutzen der übrigen Generationen auf den effizienten Niveaus gehalten. Kurzfristige intergenerationelle Effizienz ist also gleichbedeutend mit der Lösung von folgendem Optimierungsproblem:

$$\max \rightarrow \ln c_{-1}^1 + \beta \ln c_0^2$$

unter folgenden Bedingungen:

$$\ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 \geq (U_t^1)^\circ, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.1)$$

$$c_t^1 + c_t^2 + K_{t+1} \leq (X_t)^{\alpha_1} (N_t^Y)^{\alpha_2} (K_t)^{\alpha_3}, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (3.2)$$

$$R_t \geq R_{t-1} + g(R_{t-1}) - X_{t-1}, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (3.3)$$

$$c_T^1 \geq \underline{c}^1, \quad K_{T+1} \geq \underline{K}, \quad R_T \geq \underline{R}. \quad (3.4)$$

$(U_t^1)^\circ$ sind die exogen gegebenen Minimumlevels von Konsum für alle anderen Generationen die nicht in Periode $t = -1$ geboren wurden. Bedingung (3.1) besagt, dass der Lebensnutzen der folgenden jüngeren Generationen nicht unter ein bestimmtes positives Minimumlevel fallen darf (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S.37). Außerdem darf höchstens so viel konsumiert und investiert werden wie produziert wird. Dies geht aus Bedingung (3.2) hervor. Der Ressourcenstock der Folgeperiode muss mindestens so groß sein wie der Ressourcenstock in Periode t plus dem Wachstum der Ressource der Periode t abzüglich der Ernte in Periode t ((3.3)). (3.4) sichert Minimumlevels von Konsum, Investition und Ressourcenstock für die letzte Generation, die in die Wirtschaft in Periode $t = T$ eintritt.

Die zugehörige Lagrangefunktion nimmt folgende Form an:

$$\begin{aligned}
L = & \ln c_{-1}^1 + \beta \ln c_0^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \mu_t^c [\ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 - (U_t^1)^\circ] + \sum_{t=0}^T \Phi_t^Y \beta^t [(X_t)^{\alpha_1} (N_t^Y)^{\alpha_2} (K_t)^{\alpha_3} - \\
& c_t^1 - c_t^2 - K_{t+1}] + \sum_{t=0}^T \Phi_t^R \beta^t [R_{t-1} + g(R_{t-1}) - X_{t-1} - R_t] + \mu_t^c \beta^t [c^1 - c_t^1] + \\
& \Phi_{T+1}^K \beta^{T+1} [K - K_{T+1}] + \Phi_T^R \beta^T [R - R_T] \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Um die First Order Conditions für kurzfristige intergenerationelle Effizienz herzuleiten, wird die Lagrangefunktion nach allen Entscheidungsvariablen abgeleitet. Es ergeben sich so folgende Bedingungen (siehe Appendix 5.3.1):

$$\frac{(\Phi_t^Y)^\circ (1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ} = \frac{(c_{t+1}^2)^\circ}{\beta (c_t^1)^\circ} \tag{3.6}$$

$(\Phi_t^Y)^\circ$ gibt den Nutzenzuwachs für die älteste Generation aufgrund einer Steigerung der Produktion um eine Einheit an. (3.6) besagt also, dass die Grenzrate der Substitution zwischen gegenwärtigem und zukünftigem Konsum der jungen Generation in Periode t auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem Verhältnis zwischen gegenwärtigen und dem abgezinsten zukünftigen Schattenpreis der Produktion auf der linken Seite der Gleichung sein muss. Die Grenzrate der Substitution zwischen gegenwärtigem und zukünftigem Konsum gibt an, wie viele Einheiten von zukünftigem Konsum ein junger Haushalt in Periode t bereit ist aufzugeben, um eine zusätzliche Einheit von gegenwärtigem Konsum zu erhalten. Das Verhältnis vom gegenwärtigen und dem abgezinsten zukünftigen Schattenpreis der Produktion ist gleich der Anzahl der Einheiten von zukünftiger Produktion, die eingespart werden müssen, wenn eine zusätzliche Einheit von gegenwärtiger Produktion für den gegenwärtigen Konsum verwendet wird. Intertemporale Konsumeffizienz verlangt daher, dass der jüngere Haushalt bereit ist, genau so viele Einheiten Konsumeinheiten in der Ruhestandsperiode für eine zusätzliche Einheit Konsum in der Arbeitsperiode zu opfern, wie die Wirtschaft an zukünftiger Produktion für eine zusätzliche Einheit Produktion in der gegenwärtigen Periode opfern muss.

$$(\Phi_{t+1}^R)^\circ [1 + g'(R_t)^\circ] = (\Phi_t^R)^\circ (1 + \theta) \tag{3.7}$$

(3.7) gibt First-Order-Condition für die kurzfristig intergenerationell effiziente Akkumulation der erneuerbaren Ressource wieder. $(\Phi_{t+1}^R)^\circ$ steht für den Schattenpreis einer zusätzlichen Einheit der Ressource am Beginn der Periode t+1

und wird auf der linken Seite der Gleichung multipliziert mit dem Eigenertragsfaktor der erneuerbaren Ressource am Beginn der Periode $t + 1$. Die rechte Seite der Gleichung gibt die marginalen Opportunitätskosten einer in der Periode t nicht geernteten Ressourceneinheit wider, welche dem mit dem subjektiven Zinsfaktor multiplizierten Nutzenzuwachs einer in der Periode t geernteten Ressourceneinheit entsprechen. Intergenerationelle Effizienz verlangt also, dass der Nutzenwachstum einer zusätzlichen Einheit Ressource, die nicht geerntet wird, sondern für eine Periode weiterwächst, gleich dem Wert des Nutzens einer in Periode t zusätzliche geernteten Ressourceneinheit multipliziert mit dem Zeitpräferenzfaktor ist.

$$(\Phi_t^Y)^\circ \alpha_1 ((X_t)^\circ)^{\alpha_1 - 1} ((N_t^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_t)^\circ)^{\alpha_3} = \frac{(\Phi_{t+1}^R)^\circ}{(1+\theta)}. \quad (3.8)$$

Die Ableitung der Lagrangefunktion nach der Ressourcenernte ergibt die Bedingung (3.8). Die linke Seite gibt das Grenzprodukt der Ressourcenernte wieder und gleicht den Grenzkosten der Ressourcennutzung einer zusätzlichen Ressourceneinheit, die nicht geerntet wird. $\frac{(\Phi_{t+1}^R)^\circ}{(1+\theta)}$ steht für den diskontierten Grenznutzen einer nicht geernteten Ressourceneinheit.

$$(\Phi_{t+1}^Y)^\circ \alpha_3 ((X_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_1} ((N_{t+1}^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_3 - 1} = (\Phi_t^Y)^\circ (1 + \theta). \quad (3.9)$$

(3.9) zeigt, dass für kurzfristige intergenerationale Effizienz der Wert des Grenzproduktes von Kapitalinvestitionen gleich dem Nutzen einer zusätzlichen Einheit Produktion in Periode t mal dem Zeitpräferenzfaktor gleichen muss.

(vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S. 83-S.86)

3.1.2 Intergenerationelle Effizienz des intertemporalen Marktgleichgewichts in der kurzen Frist

Liegen die Annahmen für ein intertemporales Marktgleichgewicht, die im ersten Kapitel definiert wurden vor, stellt sich die Frage, ob dieses Marktgleichgewicht auch intergenerationell effizient ist. Dies ist der Fall, wenn die Bedingungen für ein intertemporales Gleichgewicht die First-Order-Conditions für kurzfristige

intergenerationelle Effizienz erfüllen. Unter provisorischer Annahme von Äquivalenzen zwischen Marktpreisen und Schattenpreisen soll gezeigt werden, dass die Bedingungen für Nutzenmaximierung (1.9)-(1.11), Profitmaximierung (1.16)-(1.18) und Markträumung (1.19)-(1.23) die First-Order-Conditions für intergenerationelle Effizienz in der kurzen Frist (3.6)-(3.9) implizieren. (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S. 97).

$$p_t = \frac{(\Phi_t^R)^\circ}{(\Phi_t^Y)^\circ} \text{ und } r_{t+1} = \frac{(\Phi_t^Y)^\circ(1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ}, \text{ für alle } t. \quad (3.19)$$

Unter der Annahme von (3.19) nimmt die Optimierungsbedingung (1.11) die Form von (3.6) an:

$$\frac{c_{t+1}^2}{c_t^1} = \frac{\beta(\Phi_t^Y)^\circ(1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ},$$

$$\frac{c_{t+1}^2}{\beta c_t^1} = \frac{(\Phi_t^Y)^\circ(1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ}. \quad (3.20)$$

Die Hotelling Rule (1.10) ist nach Einsetzen von (3.19) für p_t und p_{t+1} äquivalent zu (3.7):

$$r_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t} (1 + g'(R_t^d)),$$

$$\frac{(\Phi_t^Y)^\circ(1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ} = \frac{(\Phi_{t+1}^R)^\circ}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ} \frac{(\Phi_t^Y)^\circ}{(\Phi_t^R)^\circ} (1 + g'(R_t^d)),$$

$$(1 + \theta) = \frac{(\Phi_{t+1}^R)^\circ}{(\Phi_t^R)^\circ} (1 + g'(R_t^d)),$$

$$(\Phi_{t+1}^R)^\circ [1 + g'(R_t)] = (1 + \theta)(\Phi_t^R), \text{ weil } R_t^d = R_t. \quad (3.21)$$

Werden die Bedingung für profitmaximierenden Ernteinput (1.17), die No-Arbitrage Bedingung (1.9) und die provisorischen Annahmen für p_t und r_{t+1} (3.19) miteinander kombiniert, ergibt sich die First Order Condition für das intergenerationell effiziente Erntevolumen in der kurzen Frist (3.8):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_t^d} \right)^\circ = \alpha_1 (X_t^d)^{\alpha_1 - 1} (N_t^Y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} = q_t,$$

Weil $q_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}}$ (1.9) folgt:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_t^d}\right)^\circ = \alpha_1 (X_t^d)^{\alpha_1-1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}}.$$

Nach Einsetzen von (3.19) ergibt sich:

$$\alpha_1 (X_t^d)^{\alpha_1-1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} = \frac{(\Phi_{t+1}^R)^\circ (\Phi_{t+1}^Y)^\circ}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ (\Phi_t^Y)^\circ (1+\theta)}.$$

Weil $\beta = \frac{1}{1+\theta}$ folgt:

$$(\Phi_t^Y)^\circ \alpha_1 (X_t^d)^{\alpha_1-1} (N_t^y)^{\alpha_2} (K_t^d)^{\alpha_3} = \beta (\Phi_{t+1}^R)^\circ. \quad (3.22)$$

Die First-Order-Condition für das kurzfristig intergenerationell effizientem Investitionsvolumen K_{t+1} (3.9) folgt aus der Bedingung für den profitmaximierenden Kapitalinput (1.18) und (3.19):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}^d}\right)^\circ = \alpha_3 (X_{t+1}^d)^{\alpha_1} (N_{t+1}^y)^{\alpha_2} (K_{t+1}^d)^{\alpha_3-1} = r_{t+1},$$

Weil $r_{t+1} = \frac{(\Phi_t^Y)^\circ (1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ}$ folgt:

$$\alpha_3 (X_{t+1}^d)^{\alpha_1} (N_{t+1}^y)^{\alpha_2} (K_{t+1}^d)^{\alpha_3-1} = \frac{(\Phi_t^Y)^\circ (1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ},$$

$$(\Phi_{t+1}^Y)^\circ \alpha_3 (X_{t+1}^d)^{\alpha_1} (N_{t+1}^y)^{\alpha_2} (K_{t+1}^d)^{\alpha_3-1} = (\Phi_t^Y)^\circ (1 + \theta). \quad (3.23)$$

Es konnte somit gezeigt werden, dass die Bedingungen für ein intertemporales Gleichgewicht die First-Order-Conditions für kurzfristige intergenerationelle Effizienz implizieren und somit ist das intertemporale Marktgleichgewicht, welches im ersten Kapitel definiert wurde, auch intergenerationell effizient in der kurzen Frist.

3.2 Effizienz des intertemporalen Gleichgewichts in der langen Frist

Nachdem gezeigt wurde, dass das intertemporale Marktgleichgewicht kurzfristig intergenerationell effizient ist, soll in diesem Kapitel überprüft werden, ob dieses Marktgleichgewicht auch in der langen Frist effizient ist. De la Croix und Michel (2002, S.72) unterscheiden zwei Aspekte von langfristiger intergenerationeller

Effizienz, wenn es eine unendliche Zahl von Gütern und Agenten gibt. Es muss neben der dynamischen Effizienz der Produktion auch beachtet werden, ob im Steady State neben der jungen Generation auch die alte Generation betrachtet wird. Die Existenz und dynamische Stabilität eines stationären Gleichgewichts im betrachteten Modell wurden bereits in Kapitel 2 untersucht. Es existiert ein nicht-triviales stationäres Gleichgewicht, das auch dynamisch stabil ist. Bei der Untersuchung der langfristigen intergenerationellen Effizienz mit Einbindung der Haushaltsseite muss also hinterfragt werden, ob die alte Generation mit einbezogen wird oder nicht. Diamond (1965, 1128-1129) definierte Golden Age Pfade ohne die am Anfang alte Generation ebenfalls zu betrachten. Hier wird diese Generation mit einbezogen, nachdem in Kapitel 3.1.1 kurzfristige intergenerationelle Effizienz definiert wurde, indem der Nutzen der am Anfang älteren Generation unter bestimmten Bedingungen maximiert wurde.

3.2.1 Notwendige Bedingungen für die intergenerationelle Effizienz in der langen Frist

Um die Bedingungen für intergenerationelle Effizienz in der langen Frist zu definieren, wird der Lebenszeitnutzen der jungen Haushalte unter der Voraussetzung, dass die am Anfang alte Generation ein bestimmtes Nutzenlevel nicht unterschreitet (3.24) und dass die Bedingungen (3.25)-(3.28) gelten, maximiert:

$$\max \rightarrow \ln c^1 + \beta \ln c^2$$

unter den Bedingungen:

$$\ln c_0^2 \geq \ln(c_0^2)^{\square}, \quad (3.24)$$

$$c^1 L_0 + c_0^2 L_0 + K \leq (X)^{\alpha_1} (N^y)^{\alpha_2} (K_0)^{\alpha_3}, \quad (3.25)$$

$$c^1 L_0 + c^2 L_0 + K \leq (X)^{\alpha_1} (N^y)^{\alpha_2} (K)^{\alpha_3}, \quad (3.26)$$

$$X = g(R), \quad (3.27)$$

$$R_0 + g(R_0) = R + X. \quad (3.28)$$

Die Bedingungen (3.25) und (3.26) stellen sicher, dass die Investitionen und der Konsum nicht größer sind als die Produktion, (3.27) zeigt, dass sich Ernte und die Regeneration der erneuerbaren Ressource gleichen müssen. Außerdem muss laut

(3.28) der Ressourcenbestand in Periode Null und das Wachstum dieses Bestandes gleich dem Ressourcenstock plus der Ernte in jeder Periode sein.

Daraus ergibt folgende Lagrangefunktion:

$$L = \ln c^1 + \beta \ln c^2 + \mu_{-1}^c [\ln c_0^2 - \ln(c_0^2)] + \Phi_0^Y [(X)^{\alpha_1} (N^y)^{\alpha_2} (K_0)^{\alpha_3} - K - L_0 c^1 - L_0 c_0^2] + \Phi^Y [(X)^{\alpha_1} (N^y)^{\alpha_2} (K)^{\alpha_3} - K - L_0 c^1 - L_0 c^2] + \Phi_0^R [R_0 + g(R_0) - X - R] + \Phi^R [g(R) - X]. \quad (3.29)$$

Durch die Ableitung nach allen Variablen ergeben sich die First Order Conditions, welche eine langfristig intergenerationell effiziente Konsumallokation $\{(c^1)^\bullet, (c^2)^\bullet, (c_0^2)^\bullet\}$ in Verbindung mit den stationären Zuständen von Kapital K^\bullet , Ressourcenstock R^\bullet und Ressourcenernte X^\bullet charakterisieren.

$$\frac{\partial L}{\partial c^1} = \frac{1}{(c^1)^\bullet} - (\Phi_0^Y)^\bullet L_0 - (\Phi^Y)^\bullet L_0 = 0,$$

$$\frac{1}{(c^1)^\bullet} = L_0 [(\Phi_0^Y)^\bullet + (\Phi^Y)^\bullet].$$

$$\frac{\partial L}{\partial c^2} = \frac{\beta}{(c^2)^\bullet} - (\Phi^Y)^\bullet L_0 = 0,$$

$$L_0 = \frac{\beta}{(\Phi^Y)^\bullet (c^2)^\bullet}$$

L_0 wird in die Ableitung nach $(c^1)^\bullet$ eingesetzt und es ergibt sich:

$$\frac{1}{(c^1)^\bullet} = \frac{\beta}{(\Phi^Y)^\bullet (c^2)^\bullet} [(\Phi_0^Y)^\bullet + (\Phi^Y)^\bullet],$$

$$\frac{(c^2)^\bullet}{\beta (c^1)^\bullet} = \frac{1}{(\Phi^Y)^\bullet} [(\Phi_0^Y)^\bullet + (\Phi^Y)^\bullet],$$

$$\frac{(c^2)^\bullet}{\beta (c^1)^\bullet} = 1 + \frac{(\Phi_0^Y)^\bullet}{(\Phi^Y)^\bullet}. \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_0^2} = \frac{(\mu_{-1}^c)^\bullet}{(c_0^2)^\bullet} - (\Phi_0^Y)^\bullet L_0 = 0$$

$$\frac{(\mu_{c_1}^c)^\square}{(c_0^2)^\square} = (\Phi_0^Y)^\square L_0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = (\Phi_0^Y)^\square \alpha_1 (X^\square)^{\alpha_1-1} (N^\square)^{\alpha_2} (K^\square)^{\alpha_3} - (\Phi^Y)^\square \alpha_1 (X^\square)^{\alpha_1-1} (N^\square)^{\alpha_2} (K^\square)^{\alpha_3} - (\Phi_0^R)^\square - (\Phi^R)^\square = 0$$

Weil $(X^\square)^{\alpha_1} (N^\square)^{\alpha_2} (K^\square)^{\alpha_3} = Y^\square$ folgt:

$$(\Phi_0^Y)^\square \alpha_1 \frac{Y_0^\square}{X^\square} + (\Phi^Y)^\square \alpha_1 \frac{Y^\square}{X^\square} = (\Phi_0^R)^\square + (\Phi^R)^\square, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = -(\Phi_0^Y)^\square + (\Phi^Y)^\square \alpha_3 (X^\square)^{\alpha_1} (N^\square)^{\alpha_2} (K^\square)^{\alpha_3-1} - (\Phi^Y)^\square = 0$$

Weil $(X^\square)^{\alpha_1} (N^\square)^{\alpha_2} (K^\square)^{\alpha_3} = Y^\square$ folgt:

$$(\Phi^Y)^\square \left[\alpha_3 \frac{Y^\square}{K^\square} - 1 \right] = (\Phi_0^Y)^\square,$$

$$\alpha_3 \frac{Y^\square}{K^\square} = \frac{(\Phi_0^Y)^\square}{(\Phi^Y)^\square} + 1, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = -(\Phi_0^R)^\square + (\Phi^R)^\square g'(R) = 0,$$

$$(\Phi^R)^\square g'(R^\square) = (\Phi_0^R)^\square > 0. \quad (3.34)$$

Die First-Order-Conditions (3.30) – (3.34) geben die Bedingungen für eine langfristig intergenerationell effiziente Konsumallokation $\{(c^1)^\square, (c^2)^\square, (c_0^2)^\square\}$ in Verbindung mit den stationären Zuständen von Kapital K^\square , Ressourcenstock R^\square und Ressourcenernte X^\square wieder und es ergeben sich somit folgende Beobachtungen:

Eine Kombination der Gleichungen (3.30) und (3.33) macht ersichtlich, dass sich für eine oben beschriebene effiziente Allokation in der langen Frist die marginale Rate der Substitution zwischen Konsum der alten und jungen Generation $\frac{(c^2)^\square}{\beta(c^1)^\square}$ dem Grenzprodukt des Kapitals $\alpha_3 \frac{Y^\square}{K^\square}$ gleichen muss. Außerdem geht aus den Gleichungen (3.32) und (3.34) hervor, dass sich die Nutzungskosten der

Ressourcenernte $(\Phi^R) \cdot [1 + g'(R)]$ und das Grenzprodukt der Ressourcenernte $(\Phi_0^Y) \cdot \alpha_1 \frac{Y}{X} + (\Phi^Y) \cdot \alpha_1 \frac{Y}{X}$ sich gleichen müssen.

Diamond (1965, S. 1128) definierte langfristige intergenerationelle Effizienz, in dem er einen Golden Age Pfad definierte, auf dem das Verhältnis von Kapital und Output und das marginale Produkt des Kapitals über die Zeit konstant gehalten werden. Unter der Annahme, dass alle Individuen dasselbe Konsumverhalten über die gesamte Lebenszeit haben, ist der optimale Golden Age Pfad jener, auf dem jedes Individuum den höchsten Nutzen hat unter der Annahme, dass alle Generationen denselben Nutzen haben. Diamond ignoriert hier also den Nutzen der am Anfang alten Generation. Für das obige Ergebnis bedeutet das, dass Golden Age Pfade für langfristige intergenerationelle Effizienz dann erreicht werden, wenn das Mindestnutzenniveau der am Anfang alten Generation und der Übergang von einer historisch gegebenen Kapitalintensität zur einer effizienten Kapitalintensität ignoriert werden. μ_{-1}^c , Φ_0^R und Φ_0^Y müssen also gleich Null gesetzt werden.

Die Golden Age Allokation mit der Golden Rule Kapitalintensität und K^{GR} und R^{MSY} für das beschriebene Modell wird daher folgendermaßen definiert:

$$\frac{(c^2)}{\beta(c^1)} = \alpha_3 \frac{Y}{K}, \quad (3.35)$$

$$g'(R^{MSY}) = 0, \quad (3.36)$$

$$X^{MSY} = g(R^{MSY}), \quad (3.37)$$

$$(\Phi^Y) \cdot \alpha_1 \frac{Y}{X^{MSY}} = (\Phi^R). \quad (3.38)$$

Vergleicht man nun die beiden Ergebnisse wird ersichtlich, dass der maximal erneuerbare Ertrag (MSY) nur auf einem Golden Age Pfad entsteht. (3.35) zeigt, dass die Grenzrate der Substitution zwischen gegenwärtigem und zukünftigem Konsum der jungen Generation auch dann gleich der Grenzproduktivität des

produzierten Kapitals ist, wenn man den Golden Age Fall betrachtet. Da im Golden Age die Steigung der Regenerationskurve gleich Null ist, wie (3.36) zeigt, generiert der langfristig intergenerationell effiziente Ressourcenstock genau den Maximum Sustainable Yield. (3.38) zeigt, dass der Schattenpreis des Outputs, also der Nutzensteigerung einer zusätzlichen Einheit an produziertem Output, mal dem Grenzprodukt der Erntemenge gleich dem Schattenpreis des Ressourcenstocks sein muss, also dem zusätzlichen Nutzen einer zusätzlichen Einheit Ressource, die nicht geerntet wird. Diese Bedingungen für die langfristig intergenerationell effiziente Allokation werden in der folgenden Abbildung 5 zusammengefasst.

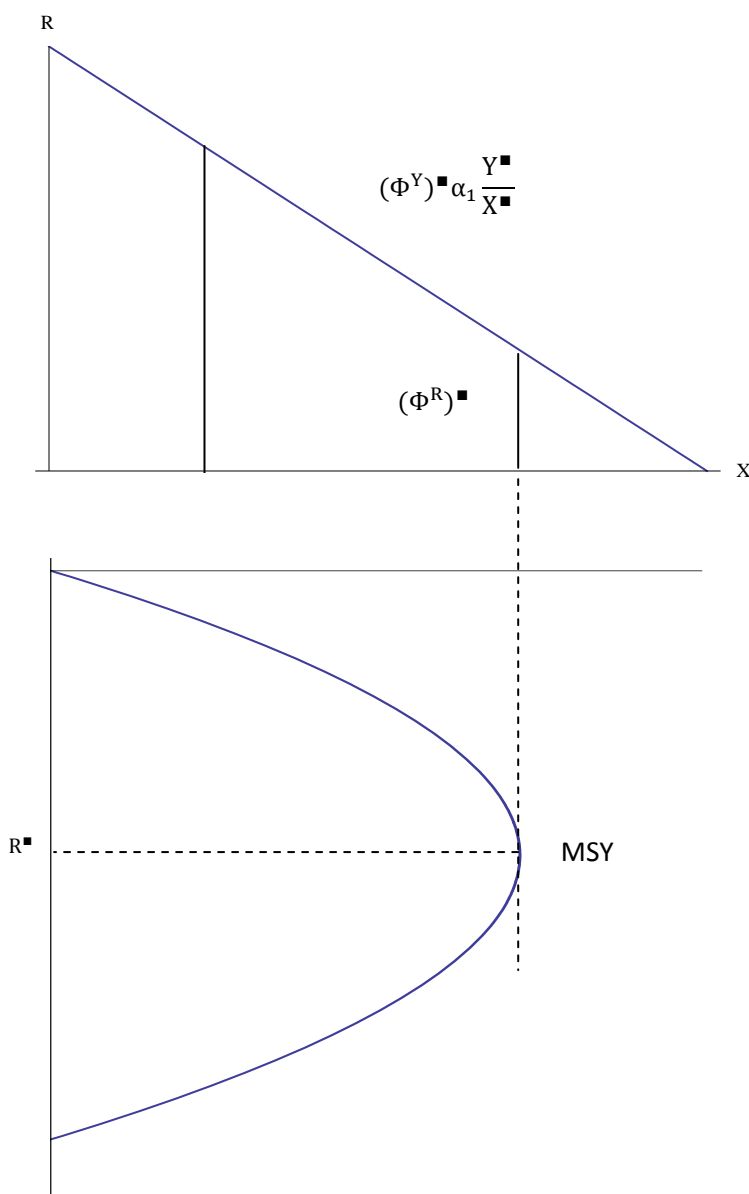


Abbildung 5 langfristig effiziente Ressourcenernte und Ressourcenstock für $(\mu_{-1}^c) = 0$ (Quelle: eigene Darstellung)

Langfristige intergenerationelle Effizienz unter Berücksichtigung der Interessen der ursprünglich alten Generation hingegen verlangt, dass die Ressourcenernte X^* und der zugehörige Ressourcenstock kleiner sind als der maximal erneuerbare Ertrag und der zugehörige Ressourcenstock. Außerdem ist das produzierte Kapital kleiner als der Golden Rule Kapitalstock.

In der folgenden Abbildung 6 werden die Bedingungen für die langfristige Effizienz zusammengefasst. Der obere Teil gibt die Bedingung für das langfristig effiziente Erntevolumen wieder. Dieses tritt dort auf, wo die Nutzungskosten der Ressourcenernte $(\Phi^R)^* [1 + g'(R)]$ dem Grenzprodukt der Ressourcenernte $(\Phi_0^Y)^* \alpha_1 \frac{Y^*}{X^*} + (\Phi^Y)^* \alpha_1 \frac{Y^*}{X^*}$ entsprechen. Dies geht aus der Kombination der Bedingungen (3.32) und (3.34) hervor. Der zugehörige langfristig effiziente Ressourcenstock wird im unteren Teil des Diagramms dargestellt und es wird ersichtlich, dass an dieser Stelle die Ertragsrate der erneuerbaren Ressource, welche durch die Steigung der Tangente in diesem Punkt dargestellt wird, positiv ist, wenn $\mu_{-1}^c > 0$ ist.

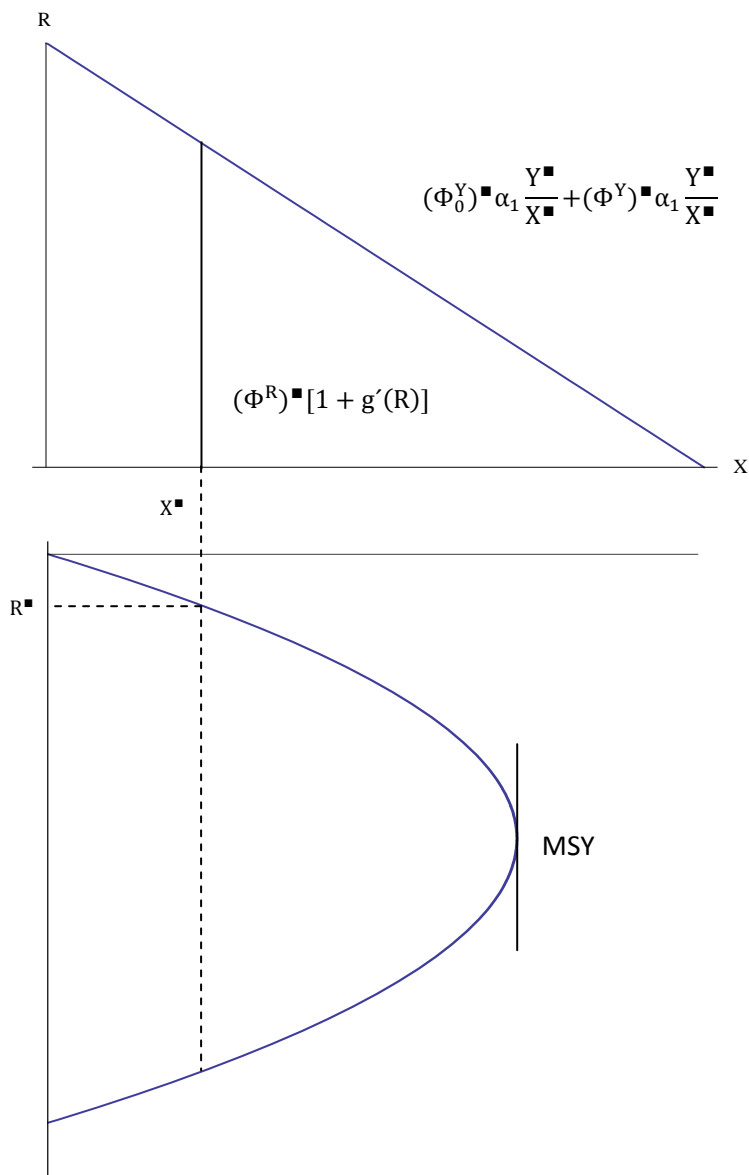


Abbildung 6: langfristig effiziente Ressourcenernte und Ressourcenstock für $(\mu_{-1}^c) > 0$ (Quelle: eigene Darstellung).

Ob die langfristig effiziente Lösung dem Maximum Sustainable Yield Ressourcenstock und zugehöriger Ressourcenernte entspricht hängt also davon ab, ob die Interessen der anfangs älteren Generation in Betracht gezogen werden oder nicht (vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S.86-88).

Nun werden die Interessen der alten Generation berücksichtigt. Da die intergenerationell effiziente Ernte und der zugehörige Ressourcenstock in der langen Frist vom Maximum Sustainable Yield Level des Ressourcenstocks abweichen, ist zu hinterfragen, wo nun die effizienten Levels der beiden betrachteten Größen liegen, um diese Allokation veranschaulichen zu können. Dass der intergenerationell effiziente Ressourcenstock in der langen Frist links von Maximum Sustainable Yield Level liegt, lässt sich durch die Kombination von Gleichungen (3.31), (3.32) und (3.33) veranschaulichen, indem jeweils $(\Phi_0^Y)^\square$ und $(\Phi^Y)^\square$ aus den ersten beiden Gleichungen in (3.33) ersetzt werden.

$$(\Phi_0^Y)^\square = \frac{(\mu_{-1}^c)^\square}{(c_0^2)^\square L_0},$$

$$(\Phi^Y)^\square = \frac{(\Phi_0^Y)^\square}{(\alpha_{3K}^Y - 1)},$$

$$\frac{(\mu_{-1}^c)^\square}{(c_0^2)^\square L_0} \alpha_1 \frac{Y^\square}{X^\square} + \frac{(\Phi_0^Y)^\square}{(\alpha_{3K}^Y - 1)} \alpha_1 \frac{Y^\square}{X^\square} = (\Phi^R)^\square [1 + g'(R)].$$

Wird die Grenzproduktivität des Ernteeinsatzes $\alpha_1 \frac{Y^\square}{X^\square}$ herausgehoben, ergibt sich:

$$\alpha_1 \frac{Y^\square}{X^\square} \left\{ \frac{(\mu_{-1}^c)^\square}{(c_0^2)^\square L_0} + \frac{(\Phi_0^Y)^\square}{(\alpha_{3K}^Y - 1)} \right\} = (\Phi^R)^\square [1 + g'(R)]. \quad (3.39)$$

Vergleicht man diese Bedingung für langfristig intergenerationell effiziente Erntemenge und Ressourcenstock mit der zugehörigen Bedingung im Golden Age (3.38) wird ersichtlich, dass die Steigung der Regenerationskurve $g'(R)$ positiv ist, wenn die Interessen der anfänglichen Althaushalte berücksichtigt werden. Die rechte Seite der Bedingung (3.39) ist wegen $g'(R) > 0$ größer als die rechte Seite der Gleichung (3.38):

$$(\Phi^Y)^\square \alpha_1 \frac{Y^\square}{X_{MSY}^\square} = (\Phi^R)^\square. \quad (3.40)$$

Somit muss die intergenerationell effiziente Ressourcenstock und die zugehörige Erntemenge, da $\mu_{-1}^c > 0$ ist, links vom Maximum Sustainable Yield liegen, da hier die Steigung der Regenerationsfunktion positiv ist. Betrachtet man die linke Seite der

beiden Bedingungen wird auch hier dieser Zusammenhang ersichtlich. Da sich linke und rechte Seite in den beiden genannten Bedingungen gleichen müssen, muss die linke Seite von (3.39) größer sein als die linke Seite von (3.40). Die Grenzproduktivität des Ernteeinsatzes $\alpha_1 \frac{Y^*}{X^*}$ nimmt mit steigendem Ernteeinsatz ab, links vom Maximum Sustainable Yield ist die Erntemenge geringer und somit die Grenzproduktivität des Ernteeinsatzes größer als jene im Maximum Sustainable Yield:

$$\frac{Y^*}{X^*} > \frac{Y^*}{X^{MSY}} \quad (3.41)$$

Es wird also auch hier ersichtlich, dass der langfristig intergenerationell effiziente Ressourcenstock links vom Maximum Sustainable Yield liegen muss.

Um die Größe des Ressourcenstocks zu bestimmen, müssen die Bedingungen (3.27) und (3.28) aus dem Maximierungsproblem für intergenerationelle Effizienz in der langen Frist kombiniert werden. Die Größe des intergenerationell effizienten Ressourcenstocks und der zugehörigen Erntemenge in der langen Frist hängt also vom anfänglichen Ressourcenstock in der Periode 0 ab.

$$X^* = g(R^*), \quad (3.42)$$

$$R_0 + g(R_0) = R^* + X^*. \quad (3.43)$$

Wird (3.40) in (3.41) und für $g(R)$ die Regenerationsfunktion ersetzt, ergibt sich folgende Gleichung, in welcher der Ressourcenstock bestimmt werden kann:

$$R_0 + \Pi R_0 - \Omega R_0^2 = R^* + \Pi R - \Omega (R^*)^2,$$

$$R^* + \Pi R^* - \Omega (R^*)^2 + R_0 + \Pi R_0 - \Omega R_0^2 = 0,$$

$$-\Omega (R^*)^2 + (1 + \Pi)R^* + R_0 + \Pi R_0 - \Omega R_0^2 = 0. \quad (3.44)$$

In Gleichung (3.44) wird ersichtlich, dass für jeden Anfangsbestand des Ressourcenstocks das zugehörige intergenerationell effiziente Level des Ressourcenbestandes in der langen Frist berechnet werden kann. Die zweite Lösung

ergibt sich, wenn der Ressourcenstock auf dem Anfangsbestand gehalten wird und somit gilt, dass

$$R_0 = R. \quad (3.45)$$

Um die langfristig intergenerationell effizienten Konsumlevels $(c^1)^*$ und $(c^2)^*$ zu bestimmen, werden die Grenzrate der Substitution und die Grenzrate der Transformation gleichgesetzt. Dazu müssen zuerst die intertemporale Indifferenzkurve und die intertemporale Transformationskurve hergeleitet werden.

Die intertemporale Indifferenzkurve erhält man, indem man die Funktion des intertemporalen Lebenszeitnutzen des Junghaushaltes einem fixen Nutzenlevel gleichsetzt und nach c^2 auflöst:

$$\ln(c^1)^* + \beta \ln(c^2)^* = (\bar{U})^* \Leftrightarrow \quad (3.46)$$

$$(c^1)^* ((c^2)^*)^\beta = (\bar{U})^* ,$$

$$((c^2)^*)^\beta = \frac{(\bar{U})^*}{(c^1)^*} ,$$

$$(c^2)^* = \left(\frac{(\bar{U})^*}{(c^1)^*} \right)^{\frac{1}{\beta}} . \quad (3.47)$$

(3.47) ist die Gleichung für die intertemporale Indifferenzkurve und wird in Abbildung 7 dargestellt.

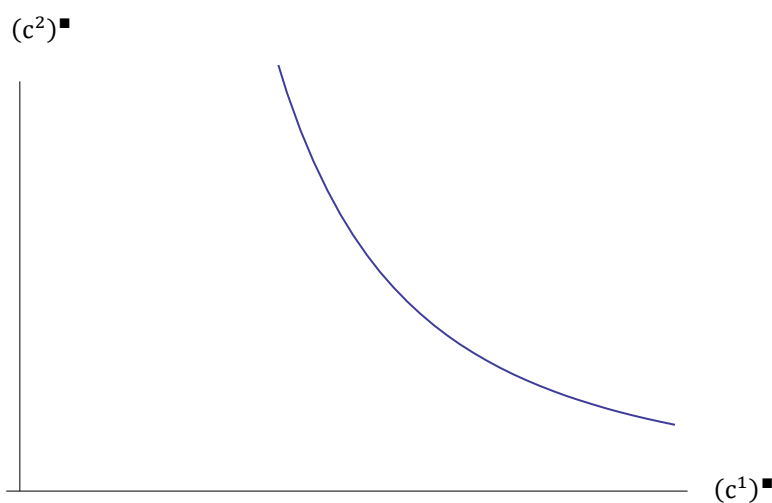


Abbildung 7 Intertemporale Indifferenzkurve (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 5.5.5)

Die Steigung der Indifferenzkurve - die Grenzrate der Substitution - wird durch die Ableitung der Indifferenzkurve nach c^1 erhalten:

$$MRS = -\frac{d(c^2)}{d(c^1)} = \frac{(c^2)}{\beta (c^1)}. \quad (3.48)$$

(vgl. Farmer und Bednar-Friedl, 2010, S.42)

Um die intertemporale Transformationskurve zu erhalten, werden die Konsum- und Investitionsbeschränkungen herangezogen:

$$(c^1)^\beta L_0 + (c_0^2)^\beta L_0 = (X^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - K^\beta, \quad (3.49)$$

$$(c^1)^\beta L_0 + (c^2)^\beta L_0 = (X^\beta)^{\alpha_1} (K^\beta)^{\alpha_3} - K^\beta. \quad (3.50)$$

Aus (3.49) wird K dargestellt und in (3.50) ersetzt.

$$K^\beta = (X^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0,$$

$$(c^1)^\beta L_0 + (c^2)^\beta L_0 = (X^\beta)^{\alpha_1} \{ (X^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0 \}^{\alpha_3} - \{ (X^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0 \},$$

$$(c^1)^\beta L_0 + (c^2)^\beta L_0 = (X^\beta)^{\alpha_1} \{ (X^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0 \}^{\alpha_3} - (X^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} + (c^1)^\beta L_0 + (c_0^2)^\beta L_0.$$

Wird aus (3.27) berücksichtigt, dass $X^\beta = g(R^\beta)$ ergibt sich nach der Umformung nach $(c^2)^\beta$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} (c^1)^\beta L_0 + (c^2)^\beta L_0 &= \\ g(R^\beta)^{\alpha_1} \{ g(R^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0 \}^{\alpha_3} - g(R^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} + (c^1)^\beta L_0 + \\ (c_0^2)^\beta L_0, &/- (c^1)^\beta L_0, \\ (c^2)^\beta L_0 &= g(R^\beta)^{\alpha_1} \{ g(R^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0 \}^{\alpha_3} - g(R^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} + (c_0^2)^\beta L_0, \\ (c^2)^\beta &= \frac{1}{L_0} [g(R^\beta)^{\alpha_1} \{ g(R^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^\beta L_0 - (c_0^2)^\beta L_0 \}^{\alpha_3} - g(R^\beta)^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} + \\ (c_0^2)^\beta L_0]. & \end{aligned} \quad (3.51)$$

(3.51) gibt die intertemporale Transformationskurve wieder und wird in Abbildung 8 dargestellt.

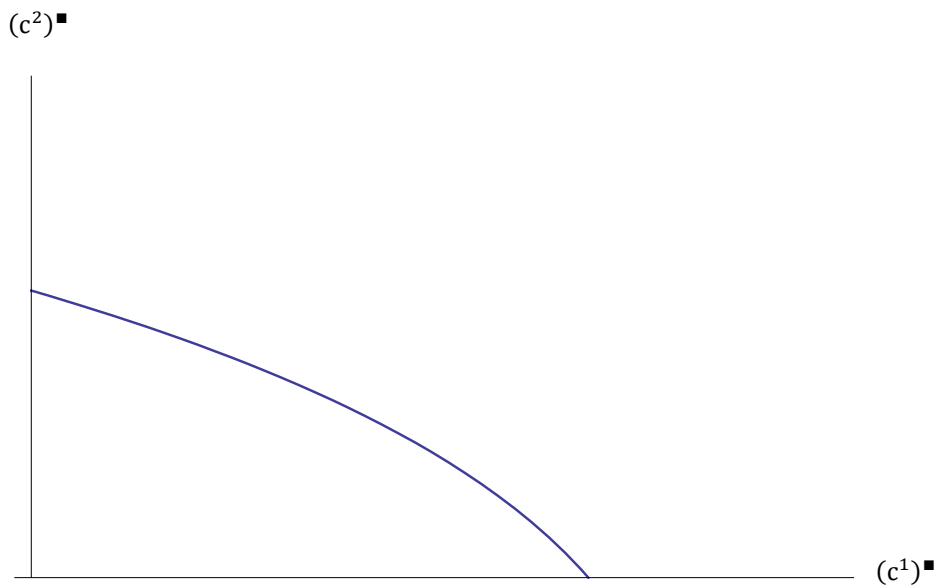


Abbildung 8 Intertemporale Transformationskurve (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 5.5.6)

Die Grenzrate der Transformation (MRT), also die Steigung der Transformationskurve erhält man, indem die Transformationskurve nach c^1 abgeleitet wird:

$$\text{MRT} = -\frac{d(c^2)^{\blacksquare}}{d(c^1)^{\blacksquare}} = +g(R^{\blacksquare})^{\alpha_1} \alpha_3 \{g(R^{\blacksquare})^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^{\blacksquare} L_0 - (c_0^2)^{\blacksquare} L_0\}^{\alpha_3 - 1}.$$

Um die langfristig intergenerationell effiziente Konsumallokation zu erhalten, müssen sich die Grenzrate der Substitution und die Grenzrate der Transformation gleichen, die Steigung der beiden Kurven müssen sich also gleichen, so werden MRS und MRT gleichgesetzt:

$$g(R^{\blacksquare})^{\alpha_1} \alpha_3 \{g(R^{\blacksquare})^{\alpha_1} (K_0)^{\alpha_3} - (c^1)^{\blacksquare} L_0 - (c_0^2)^{\blacksquare} L_0\}^{\alpha_3 - 1} = \frac{(c^2)^{\blacksquare}}{\beta (c^1)^{\blacksquare}}. \quad (3.52)$$

$g(R^{\blacksquare})$ kann aus Gleichung (3.44) bestimmt werden. $(c_0^2)^{\blacksquare}$ ist durch Bedingung (3.24) gegeben. Zusammen mit den Gleichungen (3.49) und (3.50) können die Unbekannten $(c^1)^{\blacksquare}$, $(c^2)^{\blacksquare}$ und K^{\blacksquare} bestimmt werden.

3.2.2 Intergenerationelle Effizienz des intertemporalen Marktgleichgewichts in der langen Frist

Nachdem die Bedingungen für langfristige intergenerationelle Effizienz in diesem Modell definiert wurden, gilt es zu hinterfragen, ob das im ersten Kapitel definierte Marktgleichgewicht im Steady State auch diese Bedingungen impliziert und somit auch als langfristig intergenerationell effizient bezeichnet werden kann.

Um dieser Frage nachzugehen, werden die Bedingungen der Haushaltsoptimierung (1.9)-(1.11) und die Marktträumungsbedingungen (1.16)-(1.18) des betrachteten Modells im Steady State angeschrieben:

$$\frac{c^2}{\beta c^1} = r, \quad (3.53)$$

$$q = \frac{p}{r}, \quad (3.54)$$

$$1 + g'(R) = r, \quad (3.55)$$

$$\alpha_2 Y = w, \quad (3.56)$$

$$\alpha_1 Y = qX, \quad (3.57)$$

$$\alpha_3 Y = rK. \quad (3.58)$$

Um zu zeigen, dass diese Bedingungen die Effizienzbedingungen (3.30) – (3.34) implizieren, werden provisorische Annahmen zu Äquivalenzen zwischen Marktpreisen und Schattenpreisen getroffen und nehmen folgende Form an:

$$p = \frac{(\Phi_0^R)^\alpha + (\Phi^R)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha} \quad \text{und} \quad r = \frac{(\Phi_0^Y)^\alpha + (\Phi^Y)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha}. \quad (3.59)$$

Unter der Annahme von (3.59) nimmt (3.53) die Form der Effizienzbedingung (3.30) an:

$$\frac{c^2}{\beta c^1} = \frac{(\Phi_0^Y)^\alpha + (\Phi^Y)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha},$$

$$\frac{c^2}{\beta c^1} = 1 + \frac{(\Phi_0^Y)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha}. \quad (3.60)$$

Die No-Arbitrage Bedingung im Steady State (3.54) kann mithilfe von (3.59) wie folgt dargestellt werden:

$$q = \frac{p}{r} = \frac{\frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^Y)^{\square}}}{\frac{(\Phi_0^Y)^{\square} + (\Phi^Y)^{\square}}{(\Phi^Y)^{\square}}},$$

$$q = \frac{p}{r} = \frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi_0^Y)^{\square} + (\Phi^Y)^{\square}}. \quad (3.61)$$

Wird (3.34) auf beiden Seiten um $(\Phi^R)^{\square}$ erweitert, kann diese Effizienzbedingung folgendermaßen umgeformt werden:

$$(\Phi^R)^{\square} g'(R^{\square}) + (\Phi^R)^{\square} = (\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square},$$

$$1 + g'(R) = \frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^R)^{\square}}. \quad (3.62)$$

Durch die Hotelling-Rule im Steady State (3.55) kann diese Gleichung mit r in Beziehung gesetzt werden:

$$r = \frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^R)^{\square}}. \quad (3.63)$$

Durch das Gleichsetzen von (3.59) und (3.63) ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{(\Phi_0^Y)^{\square} + (\Phi^Y)^{\square}}{(\Phi^Y)^{\square}} = \frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^R)^{\square}}. \quad (3.64)$$

Es wird ersichtlich, dass intergenerationelle Effizienz nur dann gegeben ist, wenn $g'(R) > 0$ ist, denn dann gilt dass $\frac{(\Phi_0^Y)^{\square}}{(\Phi^Y)^{\square}}$ größer als Null ist. Andernfalls wäre die Gleichung (3.64) nicht erfüllbar.

(3.63) wird in Gleichung (3.61) eingesetzt und auch p wird durch (3.59) ersetzt:

$$q = \frac{\frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^Y)^{\square}}}{\frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^R)^{\square}}} = \frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi_0^Y)^{\square} + (\Phi^Y)^{\square}},$$

$$q = \frac{(\Phi^R)^{\square}}{(\Phi^Y)^{\square}} = \frac{(\Phi_0^R)^{\square} + (\Phi^R)^{\square}}{(\Phi_0^Y)^{\square} + (\Phi^Y)^{\square}}. \quad (3.65)$$

Um zu zeigen, dass aus den Haushaltsoptimierungs- und Marktträumungsbedingungen die Effizienzbedingung (3.32) folgt, wird die Bedingung für den effizienten Ressourcenstock für Periode Null und im stationären Zustand

dargestellt, q und q_0 aus (3.64) ersetzt und die sich ergebenden Gleichungen werden addiert:

$$\alpha_1 \frac{Y}{X} = q,$$

$$\alpha_1 \frac{Y_0}{X} = q_0,$$

$$\alpha_1 \frac{Y}{X} = \frac{(\Phi^R)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha},$$

$$(\Phi^Y)^\alpha \alpha_1 \frac{Y}{X} = (\Phi^R)^\alpha,$$

$$\alpha_1 \frac{Y_0}{X} = \frac{(\Phi_0^R)^\alpha}{(\Phi_0^Y)^\alpha},$$

$$(\Phi_0^Y)^\alpha \alpha_1 \frac{Y_0}{X} = (\Phi_0^R)^\alpha,$$

$$(\Phi^Y)^\alpha \alpha_1 \frac{Y}{X} + (\Phi_0^Y)^\alpha \alpha_1 \frac{Y_0}{X} = (\Phi^R)^\alpha + (\Phi_0^R)^\alpha. \quad (3.66)$$

Wird die Bedingung des profitmaximierenden Kapital inputs im Steady State (3.58) r aus (3.59) ersetzt, ergibt sich die langfristige intergenerationelle Effizienz-Bedingung (3.33):

$$\alpha_3 \frac{Y}{K} = r,$$

$$\alpha_3 \frac{Y}{K} = \frac{(\Phi_0^Y)^\alpha + (\Phi^Y)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha},$$

$$\alpha_3 \frac{Y}{K} = 1 + \frac{(\Phi_0^Y)^\alpha}{(\Phi^Y)^\alpha}. \quad (3.67)$$

Es konnte somit gezeigt werden, dass die Bedingungen für ein intertemporales Gleichgewicht im Steady State die Bedingungen für langfristig intergenerationelle Effizienz implizieren und somit ist das intertemporale Marktgleichgewicht, welches im ersten Kapitel definiert wurde nicht nur in der kurzen, sondern auch in der langen Frist intergenerationell effizient, wenn $g'(R) > 0$ ist.

4. Zusammenfassung

Das Kernthema dieser Arbeit ist, ob in einem Diamond (1965)-OLG Modell mit logistisch regenerierenden Ressourcen die Existenz und die dynamische Stabilität von stationären Zuständen nachgewiesen werden können und ob das definierte stationäre Gleichgewicht in der kurzen und langen Frist effizient ist.

Der Vergleich in diesem Modell von Ressourcenhandel am Periodenanfang und Periodenende führt zu keinen grundlegenden Veränderungen für die Bedingungen der Haushaltsoptimierung und der Bewegungsgleichungen von Ressourcenbestand und Ressourcenernte. Auch im Modell ohne Kapital ergeben sich ähnliche Optimierungsbedingungen für die Haushalte. Der Übergang von einer linearen zu einer logistischen Wachstumsfunktion lässt die Frage nach der Existenz eines stationären Zustands virulent werden. Überlappende Generationen, intergenerationeller Egoismus und der Handel von natürlichen Ressourcen zwischen Generationen auf Wettbewerbsmärkten erfordern bestimmte Annahmen bezüglich Präferenzen, Technologie und dem natürlichen Wachstumspotential der erneuerbaren Ressource, wenn neben dem trivialen auch ein nicht-trivialer stationärer Zustand existieren soll. Die Existenzbedingungen für den nicht-trivialen stationären Zustand erfordern, dass das Wachstumspotential des Ressourcenstocks (Kurve der RR-Kurve) im Ursprung ausreichend hoch sein muss im Vergleich zur Nachfrage nach der natürlichen Ressource als Produktionsinput. Nur unter dieser Voraussetzung kann die Wirtschaft in Gang kommen.

Es wurde außerdem nachgewiesen, dass der triviale stationäre Zustand, also der Schnittpunkt im Ursprung von RR- und XX-Kurve, asymptotisch instabil ist. Der nicht-triviale stationäre Zustand ist ein stabiler, nicht oszillierender Sattelpunkt, weil die XX-Kurve die RR-Kurve in diesem Punkt von unten schneidet, beziehungsweise, dass die Steigung der XX-Kurve größer ist als die Steigung der RR-Kurve im Bereich des nicht-trivialen stationären Zustands.

Die Darstellung der Sattelpfade die zum nicht-trivialen stationären Zustand konvergieren, zeigt, dass nachhaltiges Wachstum, also die Akkumulation von produziertem Kapital und die Gleichverteilung des Ressourcenstocks über die Generationen, nur dann mit individueller Haushaltsoptimierung und intertemporaler

Markträumung kompatibel ist, wenn der Ressourcenstock über die Zeit auf seinem ursprünglichen Wert verweilt.

Um die kurzfristige intergenerationelle Effizienz des Marktgleichgewichts im Modell mit logistischer Regeneration zu beweisen, wurde gezeigt, dass die Bedingungen für ein intertemporales Marktgleichgewicht die Bedingungen für kurzfristig intergenerationelle Effizienz implizieren. Bei der Untersuchung der langfristigen intergenerationellen Effizienz kommt es vor allem auf die Unterscheidung an, ob die Interessen der am Anfang alten Generation mit in Betracht gezogen werden oder nicht. Während die langfristig intergenerationell effiziente Lösung der Maximum Sustainable Yield Lösung gleicht, wenn die Interessen der anfangs alten Generation ignoriert werden, liegt bei Berücksichtigung dieser die effiziente Lösung unter der bioökonomisch optimalen Lösung. Abschließend konnte gezeigt werden, dass das intertemporale Marktgleichgewicht nicht nur in der kurzen, sondern auch in der langen Frist effizient ist, wenn der stationäre Ressourcenbestand im intertemporalen Marktgleichgewicht eine positive Eigenertragsrate impliziert. Anderenfalls ist das stationäre Marktgleichgewicht intergenerationell ineffizient.

5. Appendix

5.1.1 Intertemporale Budgetbeschränkung

Zur Herleitung der intertemporalen Budgetbeschränkung wird K_{t+1} aus der zweiten Budgetbeschränkung (1.2) in die erste Budgetbeschränkung (1.1) eingesetzt:

$$p_t R_t + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (R_t + g(R_t) - X_t) = q_t X_t + w_t$$

$$w_t = -q_t X_t + p_t R_t + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} R_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} g(R_t) - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} X_t$$

$$w_t = -q_t X_t + p_t R_t + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} R_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} ((\Pi - 1)R_t - \Omega R_t^2) + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} X_t$$

$$w_t = -q_t X_t + p_t R_t + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} R_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (\Pi - 1)R_t - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \Omega R_t^2 + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} X_t$$

$$w_t = c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + R_t [p_t - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (\Pi - 1) - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \Omega R_t] + X_t (\frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} - q_t)$$

Nun wird mit der No-Arbitrage Bedingung (1.9) weiter vereinfacht: $q_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}}$

$$w_t = c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + R_t \{p_t - q_t [1 + (\Pi - 1) - \Omega R_t]\} + X_t (q_t - q_t)$$

Eine Erweiterung um R_t in der eckigen Klammer ergibt:

$$w_t = +c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + R_t \{p_t - q_t [1 + \frac{(\Pi - 1)R_t}{R_t} - \frac{\Omega R_t^2}{R_t}]\} + X_t (q_t - q_t)$$

Da $X_t (q_t - q_t) = 0$ folgt:

$$w_t = +c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + R_t \{p_t - q_t [1 + \frac{g(R_t)}{R_t}]\}.$$

Nun wird aus der Hotelling Rule (1.10) p_t ausgedrückt und in der Gleichung ersetzt.

$$r_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t} (1 + g'(R_t^d))$$

$$p_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (1 + g'(R_t^d))$$

$$p_t = q_t (1 + g'(R_t^d))$$

$$w_t = +c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + R_t \left\{ q_t (1 + g'(R_t^d)) - q_t \left[1 + \frac{g(R_t)}{R_t} \right] \right\}$$

$$w_t = +c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + q_t R_t \left[g'(R_t) + \frac{g(R_t)}{R_t} \right]$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + q_t \left[\frac{g(R_t^d)}{R_t^d} - g'(R_t^d) \right] R_t^d$$

5.1.2 Konsumlevel der Junghaushalte

Auf Basis der intertemporalen Budgetbeschränkung (1.12) kann nun das Konsumniveau der Junghaushalte dargestellt werden.

$$\frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = \beta c_t^1,$$

$$c_{t+1}^2 = \beta c_t^1 r_{t+1}$$

$$c_t^1 + \frac{\beta c_t^1 r_{t+1}}{r_{t+1}} = w_t + q_t \left[\frac{g(R_t^d)}{R_t^d} - g'(R_t^d) \right] R_t^d$$

$$c_t^1 (1 + \beta) = w_t + q_t \left[\frac{g(R_t^d)}{R_t^d} - g'(R_t^d) \right] R_t^d$$

$$c_t^1 = \frac{1}{(1 + \beta)} \left\{ w_t + q_t \left[\frac{g(R_t^d)}{R_t^d} - g'(R_t^d) \right] R_t^d \right\}$$

5.1.3 Gleichgewichtsdynamik des Kapitals

Setzt man nun die Marktträumungsbedingungen ((1.19)-(1.23) in die Profitmaximierungsbedingungen (1.16)-(1.18) und diese wiederum in (1.24) ergeben sich folgende Beziehungen:

$$w_t = \alpha_2 Y_t,$$

$$q_t = \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t},$$

$$r_t = \frac{\alpha_3 Y_t}{K_t},$$

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \left\{ \alpha_2 Y_t + \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} \Phi(R_t) R_t \right\} - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} - \frac{\alpha_3 Y_t}{K_t} K_t,$$

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \alpha_2 Y_t + \gamma \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} - \alpha_3 Y_t.$$

Aus der Hotelling Rule (1.10) wissen wir: $r_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t} (1 + g'(R_t))$ bzw.

$$p_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} (1 + g'(R_t)).$$

Nun wird die No Arbitrage Bedingung (1.9) hinzugezogen:

$$q_t = \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}},$$

$$p_t = q_t (1 + g'(R_t))$$

Dieses Ergebnis wird wieder in die Hotelling-Rule resubstituiert.

$$p_{t+1} = q_{t+1} (1 + g'(R_{t+1}))$$

$$r_{t+1} = \frac{q_{t+1} (1 + g'(R_{t+1}))}{q_t (1 + g'(R_t))} (1 + g'(R_t))$$

$$r_{t+1} = \frac{q_{t+1} (1 + g'(R_{t+1}))}{q_t}$$

Aus den Profitmaximierungsbedingungen ist folgendes bekannt:

$$\alpha_1 Y_{t+1} = q_{t+1} X_{t+1},$$

$$\alpha_3 Y_{t+1} = r_{t+1} K_{t+1}.$$

Damit wird

$$r_{t+1} = \frac{q_{t+1} (1 + g'(R_{t+1}))}{q_t} \text{ ZU:}$$

$$\frac{\alpha_3 Y_{t+1}}{K_{t+1}} = \frac{\alpha_1 Y_{t+1} (1 + g'(R_{t+1}))}{\alpha_1 \frac{Y_t}{X_t} X_{t+1}}$$

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3 Y_t X_{t+1}}{\alpha_1 Y_t (1 + g'(R_{t+1})) X_t} = K_{t+1}$$

$$K_{t+1} = \alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{(1 + g'(R_{t+1}))} \right] \left(\frac{Y_t}{X_t} \right).$$

5.1.4 Schranken für die Ressourcenernte

$$K_{t+1} = Y_t - \gamma \alpha_2 Y_t - \gamma \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} - \alpha_3 Y_t \geq 0$$

Y_t wird herausgehoben und weggekürzt, danach wird ein Teil der linken Seite auf die rechte Seite verschoben:

$$1 - \gamma \alpha_2 - \alpha_3 \geq \gamma \frac{\alpha_1}{X_t} \Phi(R_t) R_t + R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1}{X_t}.$$

Auf der rechten Seite kann $\frac{1}{X_t}$ herausgehoben werden und wird danach auf die linke Seite dividiert. Zusätzlich kann auf der rechten Seite $\alpha_1 R_t$ herausgehoben werden:

$$1 - \gamma \alpha_2 - \alpha_3 \geq \frac{1}{X_t} \{ \gamma \alpha_1 \Phi(R_t) R_t + R_t [1 + g'(R_t)] \alpha_1 \},$$

$$X_t [1 - \gamma \alpha_2 - \alpha_3] \geq \alpha_1 R_t \{ \gamma \Phi(R_t) + [1 + g'(R_t)] \},$$

$$X_t [1 - \gamma \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2)] \geq \alpha_1 R_t \{ \gamma \Phi(R_t) + [1 + g'(R_t)] \},$$

$$X_t [\alpha_1 + \alpha_2 (1 - \gamma)] \geq \alpha_1 R_t \{ \gamma \Phi(R_t) + [1 + g'(R_t)] \},$$

$$X_t [\alpha_1 + \alpha_2 \sigma] \geq \alpha_1 R_t \{ \gamma \Phi(R_t) + [1 + g'(R_t)] \},$$

$$\frac{\alpha_1 R_t \{ \gamma \Phi(R_t) + [1 + g'(R_t)] \}}{[\alpha_1 + \alpha_2 \sigma]} \leq X_t \leq R_t + g(R_t), \forall t \quad 1 + g'(R_t) \geq 0.$$

5.1.5 Bewegungsgleichung der Ernte

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1 + g'(R_{t+1})} \right] \left(\frac{Y_t}{X_t} \right) = Y_t - \gamma \alpha_2 Y_t - \gamma \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} - \alpha_3 Y_t$$

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1 + g'(R_{t+1})} \right] \left(\frac{Y_t}{X_t} \right) = Y_t - \gamma \alpha_2 Y_t - \gamma \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1 Y_t}{X_t} - \alpha_3 Y_t$$

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1 + g'(R_{t+1})} \right] \left(\frac{1}{X_t} \right) = 1 - \gamma \alpha_2 - \gamma \frac{\alpha_1}{X_t} \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1}{X_t} - \alpha_3$$

Das X_t im Nenner auf der linken Seite wird auf die rechte Seite multipliziert.

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1+g'(R_{t+1})} \right] = X_t - \gamma \alpha_2 X_t - \gamma \frac{\alpha_1}{x_t} \Phi(R_t) R_t X_t - R_t [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_1}{x_t} X_t - \alpha_3 X_t$$

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1+g'(R_{t+1})} \right] = X_t - \gamma \alpha_2 X_t - \alpha_3 X_t - \gamma \alpha_1 \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \alpha_1$$

Nun wird X_t herausgehoben.

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1+g'(R_{t+1})} \right] = X_t (1 - \gamma \alpha_2 - \alpha_3) - \gamma \alpha_1 \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \alpha_1$$

γ und α_3 werden durch folgende Ausdrücke ersetzt:

$\gamma = 1 - \sigma$, $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$, und es ergibt sich:

$$\alpha_3 \left[\frac{X_{t+1}}{1+g'(R_{t+1})} \right] = X_t [1 - (1 - \sigma) \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2)] - \gamma \alpha_1 \Phi(R_t) R_t - R_t [1 + g'(R_t)] \alpha_1.$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung für die Ressourcenernte:

$$X_{t+1} = \frac{1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})] \{ X_t (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t \}.$$

5.1.6 Haushaltsoptimierung unter „end-of-period“ Märkten

$$L = \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t [w_t - p_t R_{t+1} - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] + \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} X_{t+1}]$$

$$(i) \frac{\partial L}{\partial X_{t+1}} = -\lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \lambda_t \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} = 0$$

$$(ii) \frac{\partial L}{\partial R_{t+1}} = -\lambda_t p_t + \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} g'(R_{t+1}) = 0$$

$$(iii) \frac{\partial L}{\partial c_t^1} = \frac{1}{c_t^1} - \lambda_t = 0$$

$$(iv) \frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^2} = \frac{\beta}{c_{t+1}^2} - \lambda_t \frac{1}{r_{t+1}} = 0$$

Aus (i) ergibt sich folgende Optimierungsbedingung:

$$p_{t+1} = q_{t+1}.$$

λ aus (iii) wird in Gleichung (iv) eingesetzt:

$$\frac{\beta}{c_{t+1}^2} = \frac{1}{c_t^1} \frac{1}{r_{t+1}},$$

$$\beta c_t^1 = \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}}.$$

Gleichung (ii) wird nach r_{t+1} aufgelöst:

$$\lambda_{\mathbb{E}} \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \lambda_{\mathbb{E}} \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} g'(R_{t+1}) = \lambda_{\mathbb{E}} p_t,$$

$$\frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [1 + g'(R_{t+1})] = p_t,$$

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} [1 + g'(R_{t+1})] = r_{t+1}.$$

$$p_t R_{t+1} + c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] + \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} X_{t+1} = w_t$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1}] + \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} X_{t+1} - p_t R_{t+1}$$

Zieht man die Optimierungsbedingungen in Betracht, ergibt sich folgende Gleichung:

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1} + X_{t+1}] - \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} [1 + g'(R_{t+1})] R_{t+1} \text{ bzw.}$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \{R_{t+1} + g(R_{t+1}) - X_{t+1} + X_{t+1} - [1 + g'(R_{t+1})] R_{t+1}\}.$$

In der geschwungenen Klammer wird $g(R_{t+1})$ mit R_{t+1} erweitert, danach kann R_{t+1} aus der geschwungenen Klammer herausgehoben werden. Daraus ergibt sich die intertemporale Budgetbeschränkung unter „end-of-period“ Märkten:

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1}.$$

Nach Einsetzen der Optimierungsbedingung ergibt sich folgendes Konsumlevel für die jüngere Generation:

$$c_t^1 = \frac{1}{(1+\beta)} \left\{ w_t + \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} \left[\frac{g(R_{t+1})}{R_{t+1}} - g'(R_{t+1}) \right] R_{t+1} \right\}.$$

Der Konsumlevel der Althaushalte ergibt sich, wenn Hotelling-Rule und No-Arbitrage Bedingung in die Budgetbeschränkung eingesetzt werden.

$$c_t^2 = p_t R_t + r_t K_t$$

$$c_t^2 = \frac{q_{t+1}}{r_{t+1}} [1 + g'(R_{t+1})] R_t + r_t K_t$$

5.1.7 Haushaltsoptimierung im OLG-Modell ohne Kapital

$$\max \rightarrow \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2$$

s.t.

$$c_t^1 + p_t R_{t+1} + s_t = w_t,$$

$$c_{t+1}^2 = p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})] + r_{t+1} s_t.$$

$$\frac{c_{t+1}^2 - p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})]}{r_{t+1}} = s_t \text{ wird in die erste Nebenbedingung eingesetzt:}$$

$$c_t^1 + p_t R_{t+1} + \frac{c_{t+1}^2 - p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})]}{r_{t+1}} = w_t \text{ bzw.}$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})] - r_{t+1} p_t R_{t+1}}{r_{t+1}}.$$

$$L = \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t \left\{ w_t + \frac{p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})] - r_{t+1} p_t R_{t+1}}{r_{t+1}} - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^1} = \frac{1}{c_t^1} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^2} = \frac{\beta}{c_{t+1}^2} - \lambda_t \frac{1}{r_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_{t+1}} = \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} + \lambda_t \frac{p_{t+1}}{r_{t+1}} g'(R_{t+1}) - \lambda_t p_t = 0$$

Es ergeben sich folgende Optimierungsbedingungen für den Haushalt:

$$\frac{\beta}{c_{t+1}^2} = \frac{1}{c_t^1} \frac{1}{r_{t+1}} \text{ bzw.}$$

$$\frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = \beta c_t^1.$$

Aus der Ableitung nach R_{t+1} ergibt sich folgende Bedingung, die die Form der Hotelling Rule (1.10) wie im Modell mit Kapital annimmt:

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} [1 + g'(R_{t+1})] = r_{t+1}.$$

Unter Verwendung dieser Bedingung ergibt sich folgende intertemporale Budgetbeschränkung:

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})] - r_{t+1} p_t R_{t+1}}{r_{t+1}},$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1})] - \frac{p_{t+1}}{p_t} [1 + g'(R_{t+1})] p_t R_{t+1}}{r_{t+1}},$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1} [R_{t+1} + g(R_{t+1}) - R_{t+1} - g'(R_{t+1}) R_{t+1}]}{r_{t+1}},$$

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{r_{t+1}} = w_t + \frac{p_{t+1} [g(R_{t+1}) - g'(R_{t+1}) R_{t+1}]}{r_{t+1}}.$$

5.2.1 Eigenwerte der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} = \frac{1}{\alpha_3} g''(R_{t+1}) (-1) \{X_t (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t\} + [1 + g'(R_{t+1})] \frac{(\alpha_1 + \sigma \alpha_2)}{\alpha_3}$$

Aus der Gleichung für den nicht-trivialen stationären Zustand lässt sich der Ausdruck in der geschwungen Klammer folgendermaßen ersetzen:

$$\{X (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R) R - \alpha_1 [1 + g'(R)] R\} = \frac{\alpha_3 X}{[1 + g'(R)]}. \text{ Damit folgt:}$$

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} = \frac{1}{\alpha_3} g''(R_{t+1}) \frac{\alpha_3 X}{[1 + g'(R)]} (-1) + [1 + g'(R_{t+1})] \frac{(\alpha_1 + \sigma \alpha_2)}{\alpha_3}.$$

Die Größe X lässt sich durch die Gleichung für den stationären Zustand (2.1) ersetzen:

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} = -g''(R_{t+1}) \frac{g(R)}{[1 + g'(R)]} + [1 + g'(R_{t+1})] \frac{(\alpha_1 + \sigma \alpha_2)}{\alpha_3},$$

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial R_t} = \frac{1}{\alpha_3} g''(R_{t+1}) [1 + g'(R_t)] \{X_t (\alpha_1 + \sigma \alpha_2) - \alpha_1 \gamma \Phi(R_t) R_t - \alpha_1 [1 + g'(R_t)] R_t\} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R_{t+1})] \{-\gamma g'(R_t) + \gamma g''(R_t) R_t + \gamma g'(R_t) - g''(R_t) R_t - [1 + g'(R_t)]\},$$

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial R_t} = \frac{1}{\alpha_3} g''(R) [1 + g'(R_t)] \frac{\alpha_3 g(R)}{[1 + g'(R)]} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{-g''(R_t) R_t (\gamma - 1) + [1 + g'(R_t)]\},$$

$$\gamma - 1 = -\sigma,$$

$$\frac{\partial X_{t+1}}{\partial R_t} = g''(R) g(R) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{1 + g'(R_t) + \sigma g''(R_t) R_t\},$$

5.2.2 Instabilität des trivialen stationären Zustands

$$\text{tr}J(0,0) = -g''(0) \left[\frac{g(0)}{1+g'(0)} \right] + \alpha_3^{-1} [1 + g'(0)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) + 1 + g'(0) > 2$$

Da $g(0)=0$ folgt:

$$\text{tr}J(0,0) = \alpha_3^{-1} [1 + g'(0)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) + 1 + g'(0) > 2,$$

$$\det J(0,0) = \left\{ -g''(0) \left[\frac{g(0)}{1+g'(0)} \right] + \alpha_3^{-1} [1 + g'(0)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) \right\} [1 + g'(0)] -$$

$$(-1) \left\{ g(0)g''(0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)] \{ 1+g'(0) + \sigma g''(0) \} \right\} =$$

$$[1 + g'(0)]^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 =$$

$$[1 + g'(0)]^2 \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma)}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right] =$$

$$\det J(0,0) = \frac{\alpha_2 \sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 > 0,$$

$$\Delta J(X, R) \equiv (J_{11} - (1 + g'(R))^2 - 4 * J_{12}$$

$$\Delta J(X, R) = \left[\frac{-g''(0)g(0)}{1 + g'(0)} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma}{\alpha_3} \right) [1 + g'(0)] - [1 + g'(0)] \right]^2 - 4g''(R)g(0) \\ + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)] \{ 1 + g'(0) + \sigma g''(0) \}$$

Da $g(0)=0$ folgt:

$$= \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma}{\alpha_3} \right) [1 + g'(0)] - [1 + g'(0)] \right]^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)] [1 + g'(0)]$$

$$= \left[\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3}{\alpha_3} \right) [1 + g'(0)] \right]^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2$$

$$= \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3}{\alpha_3} \right)^2 [1 + g'(0)]^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2$$

$$= \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3}{\alpha_3} \right)^2 [1 + g'(0)]^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \left\{ \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3)^2}{\alpha_3} + \alpha_1 \right\} \\
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \left\{ \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3)^2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_3} \right\} \\
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \left\{ \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3)^2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_3} \right\} \\
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \left\{ \frac{\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 \sigma - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \sigma + \alpha_2^2 \sigma^2 - \alpha_2 \alpha_3 \sigma - \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3 \sigma + \alpha_3^2 + \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \right\} \\
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \left\{ \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma - 3\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 \sigma + \alpha_2^2 \sigma^2}{\alpha_3} \right\} \\
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3} \left\{ \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma - \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 \sigma + \alpha_2^2 \sigma^2}{\alpha_3} \right\} \\
&= \frac{[1+g'(0)]^2}{\alpha_3^2} \left\{ \alpha_1^2 + \alpha_1 (2\alpha_2 \sigma - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_2 \sigma)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - \text{tr}J(0,0) + \det J(0,0) &= 1 - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma)}{\alpha_3} [1 + g'(0)] - 1 - g'(0) + \frac{\alpha_2 \sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 > 0 \\
- \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma)}{\alpha_3} [1 + g'(0)] - g'(0) + \frac{\alpha_2 \sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 &> 0 \\
-g'(0) + \frac{\alpha_2 \sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 &> \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma)}{\alpha_3} [1 + g'(0)]
\end{aligned}$$

Von beiden Seiten wird 1 subtrahiert:

$$\begin{aligned}
-1 - g'(0) + \frac{\alpha_2 \sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 &> \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma)}{\alpha_3} [1 + g'(0)] - 1, \\
1 + \frac{\alpha_2 \sigma}{\alpha_3} [1 + g'(0)]^2 &> \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \sigma)}{\alpha_3} [1 + g'(0)] + [1 + g'(0)].
\end{aligned}$$

Beide Seiten werden auf den gleichen Nenner gebracht und zusätzlich wird auf der rechten Seite $[1 + g'(0)]$ herausgehoben:

$$\alpha_3 + \alpha_2 \sigma [1 + g'(0)]^2 > [1 + g'(0)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma + \alpha_3).$$

5.2.3 Spur, Determinante und Diskriminante des nicht-trivialen stationären Zustands

$$\text{tr}J(X, R) = -g''(R) \left[\frac{g(R)}{1+g'(R)} \right] + \alpha_3^{-1} [1 + g'(R)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) + 1 + g'(R)$$

Im zweiten Teil wird $1 + g'(R)$ herausgehoben und in der hinteren Klammer wird vereinfacht.

$$\text{tr}J(X, R) = -g''(R) \left[\frac{g(R)}{1+g'(R)} \right] + [1 + g'(R)] \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma + \alpha_3}{\alpha_3} \right) > 0$$

$$\det J(X, R) = \left\{ -g''(R) \left[\frac{g(R)}{1+g'(R)} \right] + \alpha_3^{-1} [1 + g'(R)] (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) \right\} [1 + g'(R)] -$$

$$[g(R)g''(R) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ 1 + g'(R) + \sigma g''(R)R \}] (-1)$$

$$= -g''(R)g(R) + \alpha_3^{-1} [1 + g'(R)]^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) +$$

$$g(R)g''(R) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ 1 + g'(R) + \sigma g''(R)R \}$$

$$= \alpha_3^{-1} [1 + g'(R)]^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \sigma) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ [1 + g'(R)] + \sigma g''(R)R \}$$

$$= \frac{\alpha_1 [1 + g'(R)]^2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2 \sigma [1 + g'(R)]^2}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1 [1 + g'(R)]^2}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1 [1 + g'(R)] \sigma g''(R)R}{\alpha_3}$$

$$\det J(X, R) = \frac{\alpha_2 \sigma [1 + g'(R)]^2}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1 [1 + g'(R)] \sigma g''(R)R}{\alpha_3} > 0$$

$$\Delta J(X, R) \equiv (J_{11} - (1 + g'(R))^2 - 4 * J_{12})$$

$$\Delta J(X, R) = \left[\frac{-g''(R)g(R)}{1 + g'(R)} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma}{\alpha_3} \right) [1 + g'(R)] - [1 + g'(R)] \right]^2 - 4g''(R)g(R) + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ 1 + g'(R) + \sigma g''(R)R \}$$

In der eckigen Klammer wird $[1 + g'(R)]$ herausgehoben und es folgt:

$$= \left[\frac{-g''(R)g(R)}{1 + g'(R)} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3}{\alpha_3} \right) [1 + g'(R)] \right]^2 - 4g''(R)g(R) + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ 1 + g'(R) + \sigma g''(R)R \}$$

$$= \left[\frac{-g''(R)g(R)}{1 + g'(R)} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sigma - \alpha_3}{\alpha_3} \right) \frac{[1 + g'(R)]^2}{1 + g'(R)} \right]^2 - 4g''(R)g(R) + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + g'(R)] \{ 1 + g'(R) + \sigma g''(R)R \}$$

$$\Delta J(\mathbf{X}, \mathbf{R}) = \frac{1}{[1 + \mathbf{g}'(\mathbf{R})]^2} \left[-\mathbf{g}''(\mathbf{R})\mathbf{g}(\mathbf{R}) + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2\sigma - \alpha_3}{\alpha_3} \right) [1 + \mathbf{g}'(\mathbf{R})]^2 \right]^2 - 4\mathbf{g}''(\mathbf{R})\mathbf{g}(\mathbf{R})$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\alpha_3} [1 + \mathbf{g}'(\mathbf{R})] \{1 + \mathbf{g}'(\mathbf{R}) + \sigma \mathbf{g}''(\mathbf{R})\mathbf{R} > 0$$

5.3.1 FOCs für kurzfristig intergenerationelle Effizienz

$$\frac{\partial L}{\partial c_0^2} = \frac{\beta}{(c_0^2)^\circ} - (\Phi_0^Y)^\circ \beta^0 = 0,$$

$$\beta = (\Phi_0^Y)^\circ (c_0^2)^\circ.$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^2} = \frac{(\mu_t^c)^\circ \beta}{(c_{t+1}^2)^\circ} - (\Phi_{t+1}^Y)^\circ \beta^{t+1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^1} = \frac{(\mu_t^c)^\circ}{(c_t^1)^\circ} - (\Phi_t^Y)^\circ \beta^t = 0,$$

$$(\mu_t^c)^\circ = (\Phi_t^Y)^\circ \beta^t (c_t^1)^\circ = 0.$$

$(\mu_t^c)^\circ$ wird in der Ableitung nach $(c_{t+1}^2)^\circ$ ersetzt und es folgt:

$$(\Phi_t^Y)^\circ \beta^{t+1} (c_t^1)^\circ = (\Phi_{t+1}^Y)^\circ \beta^{t+1} (c_{t+1}^2)^\circ,$$

$$\frac{(\Phi_t^Y)^\circ}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ} = \frac{(c_{t+1}^2)^\circ}{(c_t^1)^\circ}.$$

Die Gleichung wird um $\frac{1}{\beta}$ erweitert und weil $\frac{1}{\beta} = 1 + \theta$ folgt:

$$\frac{(\Phi_t^Y)^\circ (1+\theta)}{(\Phi_{t+1}^Y)^\circ} = \frac{(c_{t+1}^2)^\circ}{\beta (c_t^1)^\circ}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_{t+1}} = (\Phi_{t+1}^R)^\circ \beta^{t+1} [1 + \mathbf{g}'((R_{t+1}^d)^\circ)] - (\Phi_t^R)^\circ \beta^t = 0,$$

$$= (\Phi_{t+1}^R)^\circ \beta^{t+1} [1 + \mathbf{g}'((R_{t+1}^d)^\circ)] = (\Phi_t^R)^\circ \beta^t /: \beta^{t+1},$$

$$(\Phi_{t+1}^R)^\circ [1 + g'((R_{t+1}^d)^\circ)] = (\Phi_t^R)^\circ \beta^{-1}.$$

Weil $\beta^{-1} = 1 + \theta$ folgt:

$$(\Phi_{t+1}^R)^\circ [1 + g'((R_{t+1}^d)^\circ)] = (\Phi_t^R)^\circ (1 + \theta).$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_t} = (\Phi_t^Y)^\circ \beta^t \alpha_1 ((X_t)^\circ)^{\alpha_1 - 1} ((N_t^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_t)^\circ)^{\alpha_3} - (\Phi_{t+1}^R)^\circ \beta^{t+1} = 0,$$

$$(\Phi_t^Y)^\circ \alpha_1 ((X_t)^\circ)^{\alpha_1 - 1} ((N_t^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_t)^\circ)^{\alpha_3} = (\Phi_{t+1}^R)^\circ \beta.$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_{t+1}} = (\Phi_{t+1}^Y)^\circ \beta^{t+1} \alpha_3 ((X_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_1} ((N_{t+1}^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_3 - 1} - (\Phi_t^R)^\circ \beta^t = 0,$$

$$(\Phi_{t+1}^Y)^\circ \beta^{t+1} \alpha_3 ((X_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_1} ((N_{t+1}^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_3 - 1} = (\Phi_t^Y)^\circ \beta^t /: \beta^{t+1},$$

$$(\Phi_{t+1}^Y)^\circ \alpha_3 ((X_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_1} ((N_{t+1}^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_3 - 1} = (\Phi_t^Y)^\circ \beta^{-1},$$

Weil $\beta^{-1} = 1 + \theta$ folgt:

$$(\Phi_{t+1}^Y)^\circ \alpha_3 ((X_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_1} ((N_{t+1}^Y)^\circ)^{\alpha_2} ((K_{t+1}^d)^\circ)^{\alpha_3 - 1} = (\Phi_t^Y)^\circ (1 + \theta).$$

5.5.1. Programmcode Mathematica Abbildung 1

R2:=PI*R1

PI:=1.05

Plot[{R2},{R1,0,170},PlotRange->{0,200},Ticks->None,AxesLabel->{"R(t)","R(t+1)"}]

5.5.2 Programmcode Mathematica Abbildung 2

g:=pi*R-om*R^2

pi:=0.86

om:=0.002

```
Plot[{g,X},{R,0,600},PlotRange->{0,200},Ticks->None,AxesLabel->{"Rt","Rt+1-Rt"}]
```

5.5.3 Programmcode Mathematica Abbildung 3

```
X:=(a1*(1+gR)*(ga*Phi+(1+gR))*R)/((1+gR)*(a1+a2*ss)-a3)
```

```
gR:=pi-2*om*R
```

```
Phi:=g/R-gR
```

```
g:=pi*R-om*R^2
```

```
a1:=0.05
```

```
a2:=0.65
```

```
a3:=0.3
```

```
ss:=bb/(1+bb)
```

```
bb:=0.8
```

```
ga:=1-ss
```

```
pi:=0.86
```

```
om:=0.002
```

```
Plot[{g,X},{R,0,430},PlotRange->{0,120},Ticks->None,AxesLabel->{"R(t)","X(t)"}]
```

5.5.4 Programmcode Mathematica Abbildung 4

```
X:=(a1*(1+gR)*(ga*Phi+(1+gR))*R)/((1+gR)*(a1+a2*ss)-a3)
```

```
gR:=pi-2*om*R
```

```
Phi:=g/R-gR
```

```
g:=pi*R-om*R^2
```

```
a1:=0.1
```

a2:=0.8

a3:=0.1

ss:=bb/(1+bb)

bb:=0.8

ga:=1-ss

pi:=1.2

om:=0.002

Plot[{g,X},{R,0,430},PlotRange->{0,120},Ticks->None,AxesLabel->{"R(t)","X(t)"}]

5.5.5 Programmcode Mathematica Abbildung 7

c2:=(U/c1)^(1/b)

b:=0.5

U:=10

Plot[{c2},{c1,0,8},PlotRange->{0,10},Ticks->None,AxesLabel->{"c1","c2"}]

5.5.6 Programmcode Mathematica Abbildung 8

g:=pi*R-om*R^2

c2:=(g)^a1 ((g)^a1 *K0^a3-c1-c02)^a3-(g)^a1 * K0^a3+c02

R:=R0

R0:=1

a1:=0.1

a2:=0.6

a3:=0.3

pi:=1.2

$c_0 = 0.5$

$K_0 = 2$

`Plot[{c2},{c1,0,0.8},PlotRange->{0,0.5},Ticks->None,AxesLabel->{"c1","c2"}]`

6. Verwendete Variablen und ihre Bedeutung

c_t^1 ...Konsum der arbeitenden Generation in Periode t

$(c_t^1)^\circ$...kurzfristig effizienter Konsum der arbeitenden Generation in Periode t

c^1 ...Konsumlevel der jungen Generation in der langen Frist

$(c^1)^\blacksquare$...langfristig intergenerationell effizientes Konsumlevel der jungen Generation

c_t^2 ... Konsum der Generation im Ruhestand in Periode t

c_{t+1}^2 ... Konsum der Generation im Ruhestand in Periode t + 1

$(c_{t+1}^1)^\circ$...kurzfristig effizienter Konsum der arbeitenden Generation in Periode t + 1

c^2 ...Konsumlevel der alten Generation in der langen Frist

$(c^2)^\blacksquare$...langfristig intergenerationell effizientes Konsumlevel der alten Generation

β ...Zeitdiskontfaktor

λ_t ...Lagrangemultiplikator

p_t ...Preis für eine Einheit Ressourcenbestand in Periode t

p_{t+1} ...Preis für eine Einheit Ressourcenbestand in Periode t+1

R_t ... Ressourcenbestand in Periode t

R_0 ... Ressourcenbestand in Periode 0

R_{t+1} ... Ressourcenbestand in Periode t+1

R_{t+2} ... Ressourcenbestand in Periode t+2

R ...stationärer Zustand des Ressourcenbestands

R^{MSY} ... Maximum Sustainable Yield Ressourcenstock

R^\blacksquare ...langfristig intergenerationell effizienter Ressourcenstock

r_t ...Mietpreis einer Kapitaleinheit in Periode t

r_{t+1} ...Mietpreis einer Kapitaleinheit in Periode t+1

K_t ...Kapital in Periode t

K_t^d ...Kapitalinput in Produktion in Periode t

K_{t+1} ...Kapitalinvestitionen
 K^* ...langfristig intergenerationell effiziente Investitionen
 s_t ...Sparvolumen in Periode t
 q_t ...Preis einer Einheit Ressourcenernte in Periode t
 X_t ...Ressourcenernte in Periode t
 X_t^d ...Ressourcenernteinput in Produktion in Periode t
 X_{t+1} ...Ressourcenernte in Periode t+1
 X ...stationärer Zustand der Ressourcenernte
 X^{MSY} ... Maximum Sustainable Yield Erntevolumen
 X^* ...langfristig intergenerationell effiziente Ressourcenernte
 N_t^y ...Arbeitsinput in Produktion in Periode t
 w_t ...Lohneinkommen in Periode t
 $g(R_t)$...Regenerationsfunktion
 Ω ...wachstumshemmender Faktor
 Π ...Wachstumsfaktor
 π ...Wachstumsrate (wachstumsfördernder Faktor)
 $1 + g'(R_t^d)$...Eigenertragsfaktor
 Y_t ...produziertes Output
 Y^* ...langfristig intergenerationell effizientes produziertes Output
 α_1 ...Produktionselastizität Ernteinput
 α_2 ...Produktionselastizität Arbeitsinput
 α_3 ...Produktionselastizität Kapitalinput
 $J(X,R)$...Jacobi Matrix
 $\det J(X, R)$...Determinante der Jacobi Matrix
 $\text{tr} J(X, R)$...Spur der Jacobi Matrix
 $\Delta J(X, R)$...Diskriminante der Jacobi Matrix

Ψ_1 ...Eigenwert 1

Ψ_2 ...Eigenwert 2

Φ_0^Y ...Schattenpreis Produktion in Periode 0

Φ_t^Y ... Schattenpreis Produktion in Periode t

Φ^Y ...Schattenpreis Produktion in langer Frist

$(\Phi_t^Y)^\circ$... kurzfristig intergenerationell effizienter Schattenpreis der Produktion in
Periode t

$(\Phi_{t+1}^Y)^\circ$... kurzfristig intergenerationell effizienter Schattenpreis der Produktion in
Periode t + 1

$(\Phi^Y)^\blacksquare$...langfristig intergenerationell effizienter Schattenpreis der Produktion

Φ_t^R ... Schattenpreis Ressourcenstock in Periode t

Φ^R ...Schattenpreis Ressourcenstock in langer Frist

$(\Phi_t^R)^\circ$... kurzfristig intergenerationell effizienter Schattenpreis des Ressourcenstocks
in Periode t

$(\Phi_{t+1}^R)^\circ$ kurzfristig intergenerationell effizienter Schattenpreis des
Ressourcenstocks in Periode t + 1

$(\Phi^R)^\blacksquare$...langfristig intergenerationelleffizienter Schattenpreis des Ressourcenstock

Φ_{t+1}^R ... Schattenpreis Ressourcenstock in Periode t+1

7. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: lineare Wachstumsfunktion (Quelle: eigene Darstellung: siehe Appendix 5.5.1).....	9
Abbildung 2: logistische Regenerationsfunktion (Quelle: eigene Darstellung: siehe Appendix 5.5.2) ..	10
Abbildung 3: RR- und XX- Kurve mit den stationären Zuständen $R < R_{MSY}$ und $X < X_{MSY}$ (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 5.5.3).....	25
Abbildung 4: RR- und XX- Kurve mit den stationären Zuständen $R > R_{MSY}$ und $X < X_{MSY}$ (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 6.3.2).....	30
Abbildung 5: langfristig effiziente Ressourcenernte und Ressourcenstock für $(\mu - 1c) \blacksquare = 0$ (Quelle: eigene Darstellung)	48
Abbildung 6: langfristig effiziente Ressourcenernte und Ressourcenstock für $(\mu - 1c) \blacksquare > 0$ (Quelle: eigene Darstellung).	50
Abbildung 7: Intertemporale Indifferenzkurve (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 5.5.5)....	53
Abbildung 8: Intertemporale Transformationskurve (Quelle: eigene Darstellung, siehe Appendix 5.5.6)	55

8. Quellenverzeichnis

- Diamond P., 1965, *National debt in a neoclassical growth model*, *American Economic Review* 55: 1126-1150.
- Farmer K., Bednar-Friedl B. (2010), *Intertemporal Resource Economics – An Introduction to the Overlapping Generations Approach*, Springer Verlag.
- Farmer K. (2000), Intergenerational Natural-Capital Equality in an Overlapping-Generations Model with Logistic Regeneration, *Journal of Economics* 72(2): 129-152.
- Galor O. (1992), A two-sector overlapping-generations model: A global characterization of the dynamical system, *Econometrica* 60(6):1351-1386
- Grundwald A., Kopfmüller A. (2006), *Nachhaltigkeit*, Campus Verlag Frankfurt.
- Hickman P., Roberts S., Larson A., Anson H., Eisenhour D. J. (2008), *Zoologie*, Pearson Studium.
- Hotelling H. (1931), The Economics of Exhaustible Resources, *Journal of Political Economy* 39: 137-175.
- Koskela E., Ollikainen M., Puhakka M. (2001), Renewable Resources in an Overlapping Generations Economy without Capital, *Journal Econ. Management* 43 (3): 497-517.
- Mas-Colell A., Whinston MD, Green JR (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- Mourmouras A. (1991), Competitive Equilibria and sustainable growth in a life-cycle model with natural resources, *Scandinavian Journal of Economics* 93(4): 585-591.
- Olson L.J., Knapp K.C. (1997), Exhaustible Resource Allocation in an Overlapping Generations Economy, *Journal Econ. Management* 32, 277-292.
- Page T. (2007), On the problem of achieving efficiency and equity, intergenerationally, *Land Economics* 73, 580-596.
- Zilka I. (1990), Dynamic efficiency in overlapping generations models with stochastic production, *Journal of Economic Theory* 52:364-379.