

Maria Wassermann

**Portfoliooptimierung
jenseits des
klassischen Markowitz-Ansatzes**

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Master of Science
der Studienrichtung Betriebswirtschaft
an der Karl-Franzens-Universität Graz

o. Univ.-Prof. Dr. Edwin O. Fischer
Institut für Finanzwirtschaft

Graz, Mai 2016

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

Datum:

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-------------|
| <i>Symbolverzeichnis</i> | <i>iv</i> |
| <i>Abbildungsverzeichnis</i> | <i>viii</i> |
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Klassische Portfoliotheorie | 2 |
| 2.1 Renditen, Varianzen und Kovarianzen | 2 |
| 2.2 Portfoliotheorie | 5 |
| 2.3 Risikoeffiziente Portfolios im Zwei-Wertpapier-Fall..... | 7 |
| 2.4 Risikoeffiziente Portfolios für P Wertpapiere | 12 |
| 2.5 Kapitalmarktklinie – Portfoliotheorie nach Tobin..... | 16 |
| 2.6 Wertpapierlinie – Capital Asset Pricing Modell..... | 17 |
| 2.7 Diversifikationseffekt..... | 20 |
| 3. Schwächen der klassischen Portfoliotheorie und alternative Ansätze | 21 |
| 3.1 Schwächen der klassischen Portfoliotheorie | 21 |
| 3.1.1 Schätzfehler in den Eingabegrößen | 21 |
| 3.1.2 Normalverteilte Renditen und quadratische Nutzenfunktion..... | 22 |
| 3.1.3 Informationsaggregation | 22 |
| 3.1.4 Sensibilität der Portfolioallokation und Mehrdeutigkeit der Daten..... | 23 |
| 3.2 Alternative Risikomaße | 24 |
| 3.3 Maximierung der Nutzenfunktion..... | 24 |
| 3.4 Mehrperiodiger Planungshorizont | 25 |
| 3.5 Lineare Programmierung..... | 26 |
| 4. „resampled efficiency“ | 27 |
| 4.1 „resampling“ – Monte-Carlo-Simulation | 28 |
| 4.2 „resampling“ – Bootstrapping | 29 |
| 4.3 „resampled efficient frontier“ | 29 |
| 4.4 Eigenschaften der „resampled efficient frontier“ Portfolios | 30 |
| 5. „shrinkage“-Verfahren | 32 |
| 5.1 James/Stein-Schätzer | 33 |
| 5.2 Bayes/Stein-Schätzer nach Jorion | 34 |
| 6. Black-Litterman-Modell | 36 |
| 6.1 Neutraler Referenzpunkt – Gleichgewichtsrenditen | 38 |

| | | |
|-------|--|-----------|
| 6.2 | Verteilung der Referenzrenditen | 40 |
| 6.3 | Subjektive Ansichten der Investoren | 41 |
| 6.4 | Revidierte Renditeerwartungen nach Black-Litterman | 43 |
| 6.5 | Sicherheit der Prognose | 47 |
| 6.5.1 | Prognose unter Sicherheit | 47 |
| 6.5.2 | Prognosen unter Unsicherheit..... | 48 |
| 6.6 | Theils Methode..... | 48 |
| 6.7 | Schwächen des Black-Litterman-Modells | 49 |
| 7. | <i>Berücksichtigung höherer Momente</i> | 51 |
| 7.1 | Schiefe | 53 |
| 7.2 | Wölbung..... | 54 |
| 7.3 | Taylorreihenerweiterung | 54 |
| 7.4 | Polynomial Goal Programming | 56 |
| 7.5 | Gradientenverfahren | 63 |
| 7.6 | Kornisch-Fischer-Methode – Modifizierter Value at Risk | 65 |
| 8. | <i>Zusammenfassung.....</i> | 66 |
| | <i>Literaturverzeichnis.....</i> | 67 |

Symbolverzeichnis

| | |
|-----------------|---|
| a_{ij} | Elemente der C^{-1} |
| c | Schrumpf-Faktor |
| c_i | Elemente der letzten Zeilen bzw. letzten Spalte der C^{-1} |
| C | Varianz-Kovarianz-Matrix erweitert um die Nebenbedingungen |
| C^{-1} | Inverse der erweiterten Varianz-Kovarianz-Matrix |
| $Cov_{i,j}$ | Kovarianz der Wertpapiere i und j |
| $Cov(r_0, r_X)$ | Kovarianz aus dem Wertpapier r_0 und r_X |
| d_i | Differenzwerte zwischen O_i und O_i^* |
| D_t | Dividende zum Zeitpunkt t |
| e | Spaltenvektor mit Renditen und Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter |
| $E[\cdot]$ | Erwartungswert einer Zufallsvariable |
| $E[\tilde{r}]$ | erwartete Rendite |
| $E(r_i)$ | erwartete Rendite des Wertpapiers i |
| $E(r_{PF})$ | erwartete Rendite eines Portfolios |
| $E(r_X)$ | erwartete Rendite eines Portfolios aus riskanten Wertpapieren |
| $E(R)$ | Vektor mit den erwarteten Überschussrenditen |
| $E(V)$ | erwartetes Endvermögen |
| G | Gradient |
| I | Vektor bestehend aus nur 1 |
| k | Anzahl der unbekanntten Mittelwerte |
| $korr_{i,M}$ | Korrelationskoeffizient des Wertpapiers i und dem Marktportfolios M |
| K | Anzahl der Portfolios; in Kapitel 6.6 erwarteten Varianzen |
| $K(X)$ | Wölbung bzw. Kurtosis |
| m | Anzahl der Subperioden |
| $mVaR$ | modifizierter Value at Risk |
| M | Marktportfolio; in Kapitel 6.6 erwarteten revidierten Renditen |
| M_2 | Varianz-Kovarianz-Matrix |
| M_3 | Schiefe-Koschiefen-Matrix |
| M_4 | Matrix mit den Werten für die Wölbung |
| MRS | Marginale Grenzrate der Substitution |
| n | Anzahl der Renditen |
| N | Anzahl der Beobachtungen |

| | |
|------------------|---|
| N^3 | Schiefe-Tensor |
| N^4 | Kurtosis-Tensor |
| $N(\mu, \sigma)$ | Normalverteilungsfunktion mit den Parametern μ und σ |
| O_i^* | individuellen optimalen Werte für die Momente der Verteilungen |
| $O(V)$ | Restbetrag der Taylorreihenerweiterung |
| p | Konfidenzintervall |
| p_i | subjektive Austauschverhältnisse zwischen den Investorzielen |
| $p(s_k)$ | subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit beim Umweltzustand s_k |
| P | Anzahl der Wertpapiere in einem Portfolio; in Kapitel 6 Vektor oder Matrix mit subjekten Prognosewerten des Investors |
| P_0 | Preis eines Wertpapiers zu Periodenanfang |
| P_T | Preis eines Wertpapiers zu Periodenende |
| q_p | kritischer Wert für den VaR |
| Q | Vektor mit subjektiven Abweichungen vom Referenzportfolio |
| r | periodenbezogene Gesamtrendite |
| \hat{r} | erwartete Rendite aus historischen Renditen |
| \bar{r} | erwartete Rendite |
| r_0 | Rendite des risikolosen Wertpapiers |
| r_f | risikoloser Zinssatz |
| \tilde{r}_G | erwartete geometrische Durchschnittsrendite |
| r_i | Rendite des Wertpapiers i |
| r_M | Rendite des Marktportfolios |
| r_{MVP} | Rendite des Minimumvarianzportfolio |
| r_{PF} | Portfoliorendite |
| $r(s_k)$ | zustandsabhängige Rendite beim Umweltzustand s_k |
| r_t | Rendite zum Zeitpunkt t |
| \tilde{r}_t | erwartete Rendite zum Zeitpunkt t |
| R_i | Renditeverteilungen von i |
| R_j | Renditeverteilungen von j |
| s | Schiefe (einer Verteilung) |
| s_{ij} | Koschiefen zwischen den Verteilungsfunktionen R_i und R_j |
| $S(X)$ | Schiefe |
| T | Anzahl der Perioden (Stichprobenumfang) |
| u_i | Störterm bzw. Zufallsfehler |
| U | Nutzenfunktion eines Investors; in Kapitel 6.6 Vektor mit den Fehlertermen |

| | |
|------------------|--|
| U^* | optimales Nutzenniveau eines Investors |
| V | Fehler der subjektiven Prognosen |
| \bar{V} | Vermögen am Periodenende |
| V_0 | Vermögen am Periodenanfang |
| VaR | Value at Risk |
| w | Vektor mit Portfoliogewichten |
| w^* | Vektor mit den optimalen Portfoliogewichten |
| w_{BL}^* | optimalen Portfoliogewichte des Black-Litterman-Modells |
| w_i | Portfolioanteil vom Wertpapier i |
| w^{MVP} | Portfoliogewichte des Minimumvarianzportfolio |
| \bar{w}_{RE} | „resampled efficient“ Portfoliogewichte |
| X | Portfolio aus riskanten Wertpapieren; in Kapitel 6.6 „factor loadings“ |
| \bar{y} | „grand mean“ |
| y_i | Durchschnittswert des Wertpapiers i |
| z_i | James/Stein-Schätzer des Wertpapiers i |
| z_{cf} | kritischer Wert für den $mVaR$ |
| α | Anteil am risikolosen Wertpapier |
| β_i | Betafaktor des Wertpapiers i |
| δ | Risikoaversionsparameter des Marktes |
| ε | Vektor mit Fehlertermen (Prognosefehlern) |
| Θ | Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter |
| κ | Wölbung bzw. Kurtosis (einer Verteilung) |
| λ | Lagrange-Multiplikator |
| μ | Mittelwert (einer Verteilung) |
| $\hat{\mu}$ | Mittelwerte aus der Stichprobe |
| $\hat{\mu}_{BL}$ | revidierten Renditeerwartungen des Black-Litterman-Modells |
| $\hat{\mu}_i$ | empirischen Renditemittelwerte |
| $\hat{\mu}_{JS}$ | James/Stein-Schätzer |
| μ_{MVP} | Renditen des Minimumvarianzportfolios |
| μ_P | Ertragsrate |
| μ_{PF} | Portfoliorendite |
| $\mu(X)$ | Mittelwert |
| Π | Vektor mit den erwarteten Renditen |
| Π^* | Gleichgewichtsrenditen bzw. Referenzrenditen |
| $\rho_{i,j}$ | Korrelationskoeffizient der Wertpapiere i und j |
| σ | Standardabweichung (einer Verteilung) |

| | |
|--------------------|--|
| σ_{ij} | Kovarianzen zwischen den Verteilungsfunktionen R_i und R_j |
| $\sigma(r_0)$ | Standardabweichung des risikolosen Wertpapiers |
| $\sigma(r_M)$ | Risiko des Marktportfolios |
| $\sigma(r_{PF})$ | erwartete Standardabweichung eines Portfolios |
| $\sigma(r_X)$ | erwartete Standardabweichung eines Portfolios aus riskanten Wertpapieren |
| $\sigma(X)$ | Standardabweichung |
| σ^2 | Varianz (einer Verteilung) bzw. erwartete Varianz |
| $\hat{\sigma}^2$ | erwartete Varianz aus historischen Renditen |
| σ_{MVP}^2 | Varianz des Minimumvarianzportfolio |
| σ_{PF}^2 | Portfoliovarianz |
| $\sigma^2(r_{PF})$ | erwartete Varianz eines Portfolios |
| Σ | Varianz-Kovarianz-Matrix |
| Σ^{-1} | Inverse der Varianz-Kovarianz-Matrix |
| $\hat{\Sigma}_i$ | empirische Kovarianzmatrix |
| τ | Proportionalitätsfaktor |
| $\phi(E(R))$ | marginale Wahrscheinlichkeitsverteilung der erwarteten Überrenditen |
| $\phi(E(R) \pi)$ | bedingte Wahrscheinlichkeit nach Berücksichtigung neuer Informationen |
| $\phi(\pi)$ | marginale Wahrscheinlichkeitsverteilung der Überrenditen aus dem CAPM |
| $\bar{\omega}$ | Varianzen der Fehlerterme ε |
| Ω | Varianz-Kovarianz-Matrix |
| Ω^{-1} | Inverse der Varianz-Kovarianz-Matrix |
| \otimes | „Kronecker“-Produkt |

Abbildungsverzeichnis

| | |
|---|----|
| <i>Abbildung 1: Effizienzkurve im 2-Wertpapier-Fall</i> | 9 |
| <i>Abbildung 2: Effizienzkurve bei alternativen Korrelationen</i> | 10 |
| <i>Abbildung 3: Grafische Bestimmung des optimalen Portfolios</i> | 11 |
| <i>Abbildung 4: Fläche möglicher Portfolios im P-Wertpapier-Fall</i> | 12 |
| <i>Abbildung 5: Kapitalmarktlinie</i> | 17 |
| <i>Abbildung 6: Wertpapierlinie</i> | 19 |
| <i>Abbildung 7: Grundidee des Black-Litterman-Ansatzes</i> | 37 |
| <i>Abbildung 8: Herleitung der revidierten Renditeerwartungen</i> | 46 |
| <i>Abbildung 9: Schiefe in der Portfolioselektion</i> | 52 |
| <i>Abbildung 10: Auswirkungen in der Portfolioauswahl, wenn die Schiefe berücksichtigt wird</i> | 53 |

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Arten der Portfoliooptimierung. Im ersten Teil wird die klassische Portfoliotheorie von Harry Markowitz ausführlich beschrieben. Dabei werden kurz die benötigten Inputparameter dargestellt, die Annahmen der Portfoliotheorie angeführt und die Methodik der Theorie im Zwei- als auch im Mehr-Wertpapier-Fall dargestellt. Nach einer kurzen Beschreibung der Kapitalmarkt- und Wertpapierlinie werden die zentralen Schwächen der klassischen Portfoliotheorie angeführt.

Daran anschließend werden im nachfolgenden Teil weitere Optimierungsmöglichkeiten jenseits der klassischen Portfoliooptimierung dargestellt. Eine von den beschriebenen Methoden ist die „resampled efficiency“. Dabei werden mittels Monte-Carlo-Simulation oder Bootstrapping erwartete Renditen und Kovarianzen geschätzt und stabilere Portfoliogewichte generiert. Eine weitere Alternative zur klassischen Portfoliotheorie ist das sogenannte „shrinkage-Verfahren“, welches versucht die Unsicherheit der Inputparameter bereits vor dem Optimierungsprozess zu berücksichtigen.

Das Black-Litterman-Verfahren ist ein weiteres Verfahren, welches in der Arbeit dargestellt wird. Ausgehend von neutralen Referenzrenditen und subjektiven Prognosen werden neue revidierte Renditen berechnet, die anschließend in die klassische Portfoliotheorie nach Markowitz einfließen.

Abschließend wird die Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung höherer Momente beschrieben. Hier werden neben der erwarteten Rendite und den Varianzen auch die Schiefe und die Wölbung mit in den Optimierungsprozess integriert.

2. Klassische Portfoliotheorie

Die Theorie der Portfoliooptimierung wurde 1952 von Harry Markowitz in seiner bahnbrechenden Arbeit „Portfolio Selection“ entwickelt und gehört heute wohl zu den grundlegendsten Konzepten in der modernen Portfoliotheorie.¹ In seinem Artikel zeigt Markowitz wie Investoren ihr optimales Portfolio anhand von nur zwei statistischen Kennzahlen, nämlich der erwarteten Performance (Erwartungswert der Rendite) μ und dem erwarteten Risiko (Varianz bzw. Standardabweichung) σ^2 bzw. σ gestalten und auswählen können.² Das Verfahren wird aus diesem Grund oftmals auch als Mittelwert-Varianz-Optimierung (mean-variance optimization) oder als μ - σ -Prinzip bezeichnet.

Das primäre Ziel der modernen Portfoliotheorie ist die Bestimmung von effizienten Portfolios. Man sucht nach jenen Portfolio-Kombinationen, die bei gegebenem erwarteten Ertrag (Rendite) das geringste Risiko bzw. bei gegebenem Risiko den höchsten erwarteten Ertrag (Rendite) aufweisen. Weiters erkannte Markowitz, dass Investoren ihr Risiko deutlich verringern können, wenn sie ihr Vermögen nicht nur in ein Wertpapier investieren, sondern es auf mehrere verschiedene Anlagetitel aufteilen. Sofern die Wertpapiere nicht vollständig positiv miteinander korrelieren, lässt sich für die Investoren folglich ein sogenannter Diversifikationseffekt erzielen.³

2.1 Renditen, Varianzen und Kovarianzen

Für die Portfoliotheorie nach Markowitz müssen vorerst die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen der einzelnen Wertpapiere bestimmt werden, welche in die Portfoliotheorie einfließen sollen.

Der Ertrag eines Wertpapiers setzt sich im Fall einer ex-post Betrachtung aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen aus der Kurs- bzw. Preisdifferenz zwischen dem Preis zu Periodenende (P_T) und dem Preis zu Periodenanfang (P_0), und zum anderen aus den Dividendenausschüttungen (D_t) während des Betrachtungszeitraums $[0, T]$.

Die periodenbezogene Gesamrendite r errechnet sich somit aus dem Verhältnis des Periodenertrags und dem zu Periodenbeginn eingesetztem Kapital.

¹ Vgl. L. Kruschwitz (2009), S. 344.

² Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 15.

³ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 187.

$$r = \frac{P_T - P_0}{P_0} + \frac{\sum_{t=0}^T D_t}{P_0} = \frac{P_T - P_0 + \sum_{t=0}^T D_t}{P_0} \quad 4$$

Da in der Realität die wahren Werte für den erwarteten Ertrag und die Kovarianzen eines Wertpapiers nicht bekannt sondern unsicher sind, müssen diese geschätzt bzw. prognostiziert werden.⁵

Die erwarteten zukünftigen Renditen hängen von mehreren unvorhersehbaren Umweltkonstellationen mit unbekanntem Eintrittswahrscheinlichkeiten ab, die in der Regel nicht exakt vorhergesagt werden können. Die erwartete Rendite eines Wertpapiers ist daher als Zufallsvariable zu behandeln⁶ und ergibt sich aus der Summe der mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten $p(s_k)$ gewichteten zustandsabhängigen Renditen $r(s_k)$.

$$E[\tilde{r}] = \sum_{k=1}^K p(s_k) \cdot r(s_k)$$

Die Varianz der Rendite errechnet sich aus der Summe der mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteten quadrierten Abweichungen der Einzelrenditen von der erwarteten Rendite.

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^K p(s_k) \cdot [r(s_k) - E[\tilde{r}]]^2$$

Da es in der Realität kaum möglich ist, Erwartungen über künftige Umweltzustände und Renditen zu bilden⁷, wird sowohl in der Wissenschaft als auch in der Praxis das statistische Maß des Erwartungswerts von Wertpapierrenditen als erwartungsgetreue Schätzung für zukünftige Renditen angesehen.⁸

Die erwartete Gesamrendite \tilde{r}_G von m Subperioden⁹ errechnet sich als geometrische Durchschnittsrendite. Dafür werden die einzelnen Renditen multiplikativ miteinander verknüpft.¹⁰

$$1 + \tilde{r}_G = (1 + \tilde{r}_1) \cdot (1 + \tilde{r}_2) \cdot \dots \cdot (1 + \tilde{r}_m)$$

Geht man von unabhängig und identisch verteilten Renditen (independent identically distributed) aus, dann sind auch ihre logarithmierten Werte (= kontinuierliche Rendite) unabhängig und identisch verteilt und können folgendermaßen dargestellt werden:

$$\ln(1 + \tilde{r}_G) = \ln(1 + \tilde{r}_1) + \ln(1 + \tilde{r}_2) + \dots + \ln(1 + \tilde{r}_m) = \sum_{i=1}^m \ln(1 + \tilde{r}_i)$$

⁴ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 124.

⁵ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 215f.

⁶ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 106.

⁷ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 130f.

⁸ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 106.

⁹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 132.

¹⁰ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 59.

Der Zentrale Grenzwert besagt nun, dass der Durchschnitt von unabhängig identisch verteilten Zufallsrenditen normalverteilt ist und durch die ersten zwei Momente, nämlich dem Erwartungswert und der Standardabweichung, eindeutig bestimmt werden kann. Verwendet man zur Schätzung der erwarteten Rendite sehr kleine Periodenlängen, indem man auf Tages- oder Wochenrenditen zurückgreift¹¹, so errechnet sich die erwartete Rendite als historische Durchschnittsrendite.

$$\hat{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad ^{12}$$

Das Risiko eines Wertpapiers wird durch die Varianz bzw. die Standardabweichung dargestellt. Bei der Varianz handelt es sich um ein Streuungsmaß, welches aus den quadrierten Abweichungen der historischen Renditen von der errechneten erwarteten Rendite ermittelt wird.¹³

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{r})^2$$

Damit die Dimension des Streuungsmaßes mit der Dimension der erwarteten Rendite übereinstimmt, wird häufig die positive Wurzel aus der Varianz betrachtet, welche als Standardabweichung benannt ist.

$$\sigma = \sqrt{\hat{\sigma}^2} \quad ^{14}$$

Eine weitere statistische Größe, welche für die Portfoliooptimierung benötigt wird, ist die Kovarianz. Sie gibt an, ob lineare Zusammenhänge zwischen den im Portfolio enthaltenen Wertpapieren bestehen. Sie lässt sich ebenfalls aus den historischen Daten mit folgender Formel schätzen:¹⁵

$$Cov_{i,j} = \frac{1}{n-1} \sum_{i,j=1}^n (r_{i,n} - \hat{r}_i) \cdot (r_{j,n} - \hat{r}_j)$$

Normiert man die Kovarianz über das Produkt der Standardabweichungen, erhält man den Korrelationskoeffizient $\rho_{i,j}$. Der Korrelationskoeffizient gibt Auskunft über die linearen Abhängigkeiten zwischen zwei Wertpapieren. Diese Größe hat gegenüber der Kovarianz den Vorteil, dass sie nur Werte im Intervall von [-1, +1] annehmen kann und daher wesentlich einfacher zu interpretieren ist.¹⁶

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov_{i,j}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

¹¹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 132.

¹² Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 106f.

¹³ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 123f.

¹⁴ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 49.

¹⁵ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 64.

¹⁶ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 138.

Beträgt der Korrelationskoeffizient genau +1, dann liegt ein perfekt positiver linearer Zusammenhang zwischen zwei Wertpapieren vor. Das impliziert, steigen die Renditen des einen Wertpapiers, dann steigen auch die Renditen des anderen Wertpapiers. Nimmt der Korrelationskoeffizient hingegen den Wert -1 an, dann liegt ein perfekt negativer linearer Zusammenhang vor. Das bedeutet, steigen die Renditen einer Aktie, dann sinken die Renditen des anderen Wertpapiers. Beträgt der Korrelationskoeffizient hingegen genau 0 oder liegt nahe bei 0, dann gibt es keine linearen Abhängigkeiten zwischen den betrachteten Wertpapieren.¹⁷

Um die erwarteten Renditen, Standardabweichungen und Kovarianzen zu schätzen, greift man in der Praxis häufig auf vergangene Daten zurück und schätzt anhand eines ausgewählten Stichprobenumfangs die Inputparameter, welche dann in die Portfoliooptimierung einfließen.

Dabei ist allerdings zu beachten, dass die statistischen Schätzungen wesentlich von der Qualität der verwendeten Daten und der angewandten statistischen Technik beeinflusst werden, und der Ansatz häufig zu unstabilen, unplausiblen und falschen Lösungen bei der Portfoliooptimierung führt.¹⁸

Desweiteren ist bekannt, dass die erwarteten Renditen signifikante zeitliche Schwankungen aufweisen¹⁹ und nicht mittelwertstationär (mittelwertstationär bedeutet, die erwarteten Renditen sind über die Zeit hinweg konstant)²⁰ sind. Die realisierten Renditen werden daher stark von den Veränderungen der erwarteten Renditen beeinflusst. Es ist daher grundsätzlich nicht realitätsgetreu, anhand von historischen Daten auf das zukünftige Renditeverhalten zu schließen, da sich neben der oben erwähnten Tatsache zusätzlich auch die Wirtschaftsbedingungen, wie z.B. das politische Umfeld, die Geld- und Fiskalpolitik, das Konsumentenverhalten, das Zinsniveau oder der Konjunkturzyklus von verschiedenen Industriezweigen über die Zeit hinweg verändern.²¹

Unterstellt man den Wertpapierrenditen, dass sie normalverteilt sind, dann unterliegt in Folge auch die Portfoliorendite einer Normalverteilung. Da die Normalverteilung durch das erste und zweite Moment (μ und σ) vollständig beschrieben werden kann, muss nicht die ganze Verteilung geschätzt werden, sondern lediglich die beiden Parameter μ und σ , was zu erheblichen Vereinfachungen führt.²²

2.2 Portfoliotheorie

Bei der klassischen Portfoliotheorie werden einige realitätseinschränkende Annahmen hinsichtlich des Kapitalmarktes und des Verhaltens der Investoren getroffen.

¹⁷ Vgl. L. Kruschwitz (2009), S. 351.

¹⁸ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 215 f.

¹⁹ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 222.

²⁰ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 96.

²¹ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 222f.

²² Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 125.

- Markowitz geht von einem einperiodigen Modell und von vollkommenen Märkten ohne Marktzugangsbarrieren aus. Das bedeutet, die am Markt verfügbaren Informationen stehen allen Marktteilnehmern vollkommen und frei zur Verfügung.
- Steuern und Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt.²³
- Er unterstellt desweiteren, dass die Wertpapiere beliebig teilbar sind und deren Renditen einer Normalverteilung unterliegen, welche durch die Parameter μ und σ vollständig beschrieben werden.
- Leerverkäufe sind zugelassen, was bedeutet, dass Investoren Wertpapiere ausborgen und verkaufen können, um diese am Ende des Planungshorizontes zum dann vorherrschenden Kurs zurückzukaufen und zurückzugeben.²⁴
- Die Anleger handeln rational und nutzenmaximierend.²⁵ Rational bedeutet, der Investor wird jenes aus mehreren Portfolios auswählen, welches bei gleichem Risiko die größte erwartete Rendite aufweist und so seinen Nutzen maximiert.²⁶
- Desweiteren folgt das Modell der Prämisse, dass Anleger risikoscheu sind und demnach ein höheres Risiko nur dann akzeptieren, wenn die Renditeerwartung dadurch überproportional zunimmt.²⁷
- Ein Investor ist nicht in der Lage, Kapital zu einem risikolosen Zinssatz aufzunehmen oder anzulegen.²⁸
- Für den Investor wird eine quadratische Nutzenfunktion unterstellt.²⁹

Um für einen Investor das optimale Portfolio zu gestalten, soll nach Markowitz nicht nur die Rendite des Portfolios als Entscheidungskriterium herangezogen werden, sondern auch das Portfoliorisiko.³⁰

Die erwartete Portfoliorendite errechnet sich aus der Summe der mit den Portfolioanteilen gewichteten geschätzten Einzelrenditen des Portfolios.³¹

$$r_{PF} = \sum_{i=1}^P w_i \cdot r_i = w^T \cdot r = [w_A \dots w_P] \cdot \begin{bmatrix} r_A \\ \vdots \\ r_P \end{bmatrix}$$

Ein Investor hat nun die Möglichkeit aus P riskanten Wertpapieren ein Portfolio zusammenzustellen, indem er den Gewichtungsvektor w festlegt. Jedes Gewicht w_i drückt dabei den Anteil aus, mit welchem das jeweilig riskante Wertpapier im Portfolio enthalten ist, wobei die Summe aller Portfolioanteile gleich 1 sein muss. Sind Leerverkäufe zugelassen, dann können

²³ Vgl. J. Rahn (2010), S. 9.

²⁴ Vgl. E. Fischer (2002), S. 42.

²⁵ Vgl. Ch. Bruns/F. Bullerdiek (2008), S. 62.

²⁶ Vgl. E. Fischer (2002), S. 42f.

²⁷ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 9.

²⁸ Vgl. J. Rahn (2010), S. 9.

²⁹ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 261.

³⁰ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 151.

³¹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 146.

die einzelnen Portfolioanteile w_i auch negative Werte annehmen, dennoch muss die Summe aller Gewichte gleich 1 ergeben.³²

$$\sum_{i=1}^P w_i = 1 \quad ^{33}$$

Sind Leerverkäufe hingegen nicht zugelassen, dann muss dem Optimierungsproblem eine weitere Nebenbedingung hinzugefügt werden, welche festlegt, dass alle im Portfolio enthaltenen Anteile $w_i \geq 0$ sind.

Im Gegensatz zur Portfolioerrendite errechnet sich das Portfoliorisiko nicht als gewichtete Summe der Einzelvarianzen, sondern berücksichtigt darüber hinaus auch noch die Abhängigkeiten der einzelnen Wertpapiere zueinander.³⁴ Das Risiko eines Portfolios hängt somit von den Portfoliogewichten, den im Portfolio enthaltenen Einzelvarianzen und den Kovarianzen der Wertpapiere ab.³⁵

$$\sigma_{PF}^2 = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P w_i \cdot w_j \cdot Cov_{i,j} = w^T \cdot \Sigma \cdot w = [w_A \quad \dots \quad w_P] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \dots & \sigma_{AP} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{PA} & \dots & \sigma_{PP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_A \\ \vdots \\ w_P \end{bmatrix} \quad ^{36}$$

Bei der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung nach Markowitz wählt der Investor jenes Wertpapierportfolio, welches bei gegebenem Risikoniveau, ausgedrückt durch die Standardabweichung des Portfolios, den größten erwarteten Ertrag aufweist.³⁷

2.3 Risikoeffiziente Portfolios im Zwei-Wertpapier-Fall

Werden nur zwei Wertpapiere in ein Portfolio integriert, dann lassen sich die Portfolioerrendite und die Portfoliovarianz durch folgende Gleichung darstellen:

$$r_{PF} = [w_A \quad w_B] \cdot \begin{bmatrix} r_A \\ r_B \end{bmatrix} = w_A \cdot r_A + w_B \cdot r_B \quad ^{38}$$

$$\sigma_{PF}^2 = [w_A \quad w_B] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{AA} & \sigma_{AB} \\ \sigma_{BA} & \sigma_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_{AB} + w_B^2 \cdot \sigma_B^2$$

³² Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 22.

³³ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 137.

³⁴ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 242.

³⁵ Vgl. A. Stephen et. al. (2005), S. 262.

³⁶ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 147.

³⁷ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 215.

³⁸ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 23.

Anhand der Formel für die Portfoliovarianz ist ersichtlich, dass das Risiko für ein Portfolio von folgenden drei Faktoren beeinflusst wird:

- von den einzelnen Wertpapiervarianzen der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere,
- von den Anteilen der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere und
- von der Korrelation (Abhängigkeiten) der Wertpapierrenditen.

Da die Summe der Portfoliogewichte w_i gleich 1 ergeben muss, kann der Zwei-Wertpapier-Fall mit Hilfe der direkten Substitution gelöst werden³⁹, indem man die Nebenbedingung nach einer Problemvariablen auflöst und anschließend in die Formel für die Portfoliorendite und die Portfoliovarianz einsetzt.

$$w_A + w_B = 1 \quad 40$$

$$w_B = 1 - w_A$$

Demnach lassen sich Portfoliorendite und -varianz wie folgt berechnen:

$$r_{PF} = w_A \cdot r_A + (1 - w_A) \cdot r_B \quad 41$$

$$\sigma_{PF}^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot (1 - w_A) \cdot \sigma_{AB}$$

Um das Portfoliorisiko zu minimieren, ist die erste Ableitung der Portfoliovarianz σ_{PF}^2 nach w_A zu bilden, welche anschließend gleich 0 gesetzt werden muss.

$$\frac{\partial \sigma_{PF}^2}{\partial w_A} = 2 \cdot w_A \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot (1 - w_A) \cdot (-1) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1 - w_A) \cdot \sigma_{AB} + 2 \cdot w_A \cdot \sigma_{AB} \cdot (-1) = 0$$

Formt man die Ableitung entsprechend um, erhält man die Portfoliogewichte, bei denen die Varianz des Portfolios minimiert wird. Dieses Portfolio wird auch als Minimumvarianzportfolio (MVP) bezeichnet.⁴²

$$w_A^{MVP} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 - 2 \cdot \sigma_{AB} + \sigma_B^2}$$

$$w_B^{MVP} = 1 - w_A^{MVP} \quad 43$$

Mit Hilfe der errechneten Gewichte können anschließend die erwartete Rendite und das Risiko des Minimumvarianzportfolios, durch Einsetzen der Gewichte in die Formeln für die Portfoliorendite und Portfoliovarianz, ermittelt werden.

³⁹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 138f.

⁴⁰ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 566.

⁴¹ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 11.

⁴² Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 139.

⁴³ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 567.

$$r_{MVP} = w_A^{MVP} \cdot r_A + w_B^{MVP} \cdot r_B$$

$$\sigma_{MVP}^2 = (w_A^{MVP})^2 \cdot \sigma_A^2 + (w_B^{MVP})^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A^{MVP} \cdot w_B^{MVP} \cdot \sigma_{AB} \quad 44$$

Um zu überprüfen, ob auch die zweite Bedingung für ein Minimum erfüllt ist, muss die zweite Ableitung von σ_{PF}^2 nach der Problemvariable w_A gebildet, und gleich 0 gesetzt werden. Da der Wert der zweiten Ableitung größer 0 ist, ist die Bedingung für ein Minimum erfüllt.⁴⁵

$$\frac{\partial^2 \sigma_{PF}^2}{\partial w_A^2} = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_{AB} = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} \quad 46$$

Betrachtet man nun alle möglichen Portfoliokombinationen in einem Rendite-Risiko-Diagramm, so zeigt sich eine begrenzende Kurve, die alle darunter liegenden Portfoliokombinationen dominiert. Diese Linie beinhaltet nur effiziente Portfolios und wird deshalb auch als „Effizienzkurve“ (efficient frontier) bezeichnet.⁴⁷

Ein effizientes Portfolio liegt immer dann vor, wenn es kein anderes Portfolio gibt, das

- bei gleichem Risiko eine höhere erwartete Rendite,
- bei gleichen erwarteten Renditen ein geringeres Risiko,
- sowohl eine höhere erwartete Rendite als auch gleichzeitig ein geringeres Risiko aufweist.⁴⁸

Für einen Investor sind daher nur jene Portfolios interessant, die rechts vom Minimumvarianzportfolio auf der Effizienzkurve liegen.⁴⁹ Alle Portfolios unterhalb der Effizienzkurve sind für den Investor nicht von Interesse, da er in der Lage wäre auf der Effizienzkurve eine Risiko-Rendite-Kombination zu erzielen, die entweder bei gleicher Rendite ein deutlich geringeres Risiko, bzw. bei gleichem Risiko eine deutlich höhere

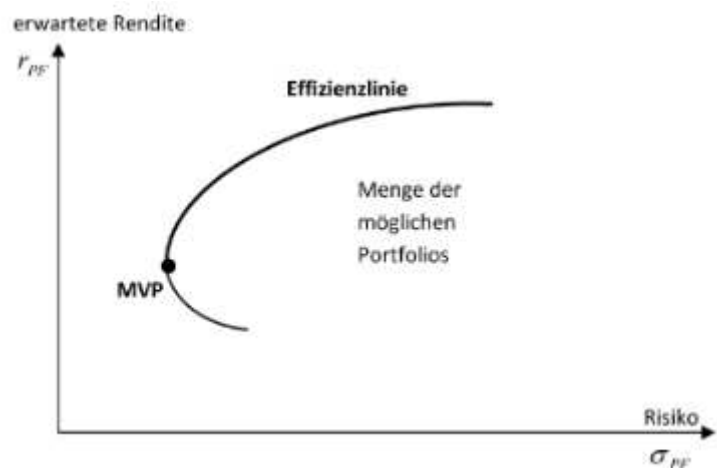


Abbildung 1: Effizienzkurve im 2-Wertpapier-Fall⁵⁰

⁴⁴ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 139f.

⁴⁵ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 567.

⁴⁶ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 140.

⁴⁷ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 567f.

⁴⁸ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 9.

⁴⁹ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 241.

⁵⁰ Vgl. eigene Darstellung in Anlehnung an P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 141.

Rendite erzielt.⁵¹ Das Minimumvarianzportfolio markiert somit den Übergang von dominierten zu risikoeffizienten Portfolios. Eine Erhöhung des Gewichts zugunsten des renditestärkeren Wertpapiers verspricht daher immer ein risikoeffizientes Portfolio.⁵²

In der folgenden Grafik werden die Auswirkungen auf die Portfoliorendite und das Portfoliorisiko bei den folgenden drei Korrelationskoeffizienten $\rho = -1$, $\rho = 0$ und $\rho = +1$ bildhaft dargestellt.⁵³

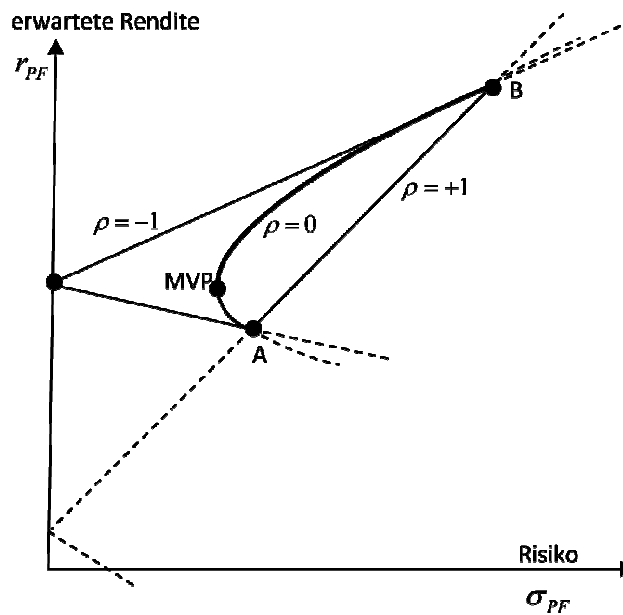


Abbildung 2: Effizienzkurve bei alternativen Korrelationen⁵⁴

Im Fall vollständig positiver Korrelation $\rho = +1$ kann man ohne Leerverkauf keinen Diversifikationseffekt erzielen, was bedeutet, dass das Risiko durch Portfeuillebildung nicht verringert werden kann.⁵⁵ Sowohl die Portfoliorendite, als auch das Portfoliorisiko ergeben sich aus dem gewichteten Durchschnitt der erwarteten Renditen und Varianzen der zwei Wertpapiere.⁵⁶ Wäre Leerverkauf möglich, könnte bei vollständig positiver Korrelation das Risiko gänzlich eliminiert werden, sofern man das renditestärkere Wertpapier leerverkauft.⁵⁷

Bei vollständig negativ korrelierten Renditen $\rho = -1$ lassen sich durch die Kombination von Wertpapieren die maximalen Diversifikationseffekte erzielen, und zwar auch ohne

⁵¹ Vgl. J. Berk/P. DeMarzo (2007), S. 337.

⁵² Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 144.

⁵³ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 139.

⁵⁴ Vgl. eigene Darstellung in Anlehnung an P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 141.

⁵⁵ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 12.

⁵⁶ Vgl. R. Michaud/R. Michaud (2008), S. 8.

⁵⁷ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 144.

Leerverkauf.⁵⁸ Durch eine geeignete Auswahl der Portfolioanteile kann das Portfoliorisiko sogar gänzlich eliminiert werden.⁵⁹

Im Fall von unkorrelierten Wertpapierrenditen $\rho = 0$ kann durch Portfeuillebildung, bis zu einem bestimmten Punkt, eine höhere Rendite bei gleichzeitig sinkendem Risiko erreicht werden.⁶⁰

Grundsätzlich kann festgehalten werden, dass sobald die Korrelation zwischen zwei Wertpapieren kleiner als 1 ist ($\rho < +1$), ein Diversifikationseffekt erzielt werden kann und sich das Risiko des Portfolios somit verringert. Das bedeutet, die Portfoliovarianz ist geringer als der gewichtete Durchschnitt der einzelnen Wertpapiervarianzen im Portfolio.⁶¹

Welches effiziente Portfolio ein Investor letztendlich auswählt⁶², ist von der individuellen Präferenzfunktion (Nutzenfunktion) und somit vom Grad der Risikoaversion abhängig.⁶³ Die Präferenzfunktion aggregiert sowohl den Nutzen aus der erwarteten Rendite, als auch das Risiko zu einem Präferenzwert, welcher sich grafisch mit Hilfe von Indifferenzkurven darstellen lässt.⁶⁴ Entlang dieser Kurve weisen alle Kombinationen von Rendite und Risiko für den Investor den gleichen erwarteten Nutzen auf. Der maximale Nutzen und somit das optimale Portfolio

eines Investors ist jenes, bei welchem die Indifferenzkurve die Effizienzkurve tangiert.⁶⁵ Dieser Tangentialpunkt ist genau dann erreicht, wenn die Steigung der Indifferenzkurve (= individuelle Grenzrate der Substitution) der Steigung der Effizienzkurve (= Grenzrate der Transformation) entspricht.⁶⁶

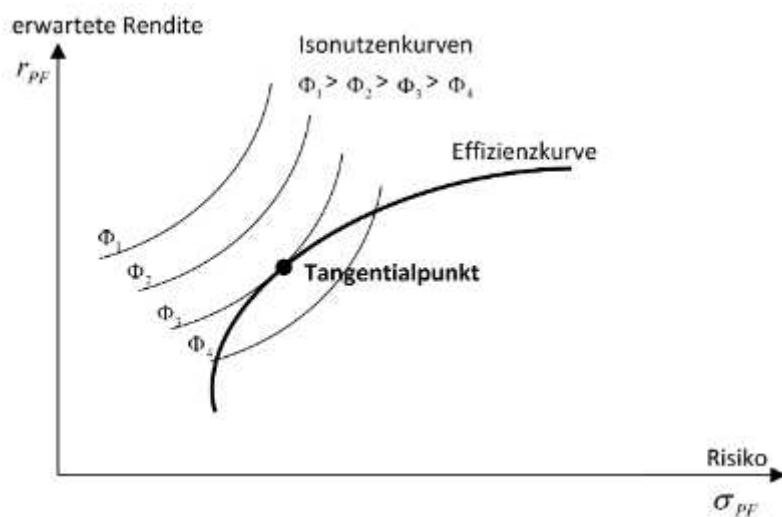


Abbildung 3: Grafische Bestimmung des optimalen Portfolios⁶⁷

⁵⁸ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 243.

⁵⁹ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 13.

⁶⁰ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007) S. 243.

⁶¹ Vgl. R. Michaud/R. Michaud (2008), S. 8.

⁶² Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 144.

⁶³ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 245.

⁶⁴ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 13.

⁶⁵ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 245.

⁶⁶ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 144.

⁶⁷ Vgl. eigene Darstellung in Anlehnung an M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 13.

2.4 Risikoeffiziente Portfolios für P Wertpapiere

Da Investoren für gewöhnlich mehr als zwei Wertpapiere halten, wird in diesem Teil der Arbeit auf den Mehr-Wertpapier-Fall eingegangen.⁶⁸ Wie auch im Zwei-Wertpapier-Fall wird zuerst die Linie mit den möglichen und der effizienten Portfolios erzeugt, indem man die Portfoliogewichte variiert. Erst in einem zweiten Schritt wird das optimale Portfolio für den Investor, unter Berücksichtigung seiner Ertrags- und Risikoeinstellung, durch den Tangentialpunkt der Effizienzkurve mit der individuellen Indifferenzkurve, bestimmt. Auch wenn eine größere Anzahl von Wertpapieren in einem Portfolio berücksichtigt wird, führt die Vorgabe einer bestimmten Portfoliorendite oder eines bestimmten Portfoliorisikos, zu genau einem risikoeffizienten Portfolio. Allerdings ist dabei zu beachten, dass bei mehr als zwei Wertpapieren nicht eine Linie möglicher Portfolios⁶⁹, sondern eine Fläche von möglichen Rendite-Risiko-Kombinationen existiert.⁷⁰ Diese Fläche aus effizienten Portfolios lässt sich dadurch begründen, dass sich bei mehr als zwei Wertpapieren unendlich viele mögliche Portfolios ergeben. So kann eine Kombination aus zwei Wertpapieren als ein eigenes Wertpapier aufgefasst werden, welches mit einem weiteren Wertpapier kombiniert werden kann. Dies stellt folglich einen neuen Zwei-Wertpapier-Fall dar, aus welchem wieder eine Linie möglicher Portfolios resultiert. Werden alle möglichen Linien zusammengefasst, so ergibt sich daraus eine Fläche möglicher Portfolios, welche in der nachfolgenden Abbildung grafisch dargestellt ist.⁷¹

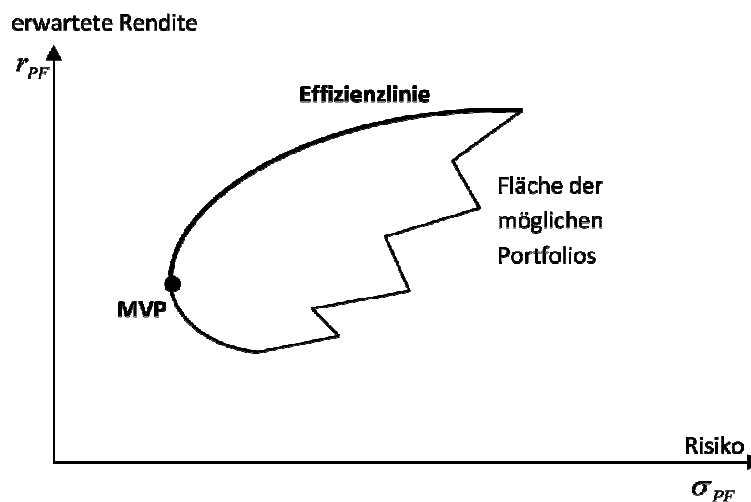


Abbildung 4: Fläche möglicher Portfolios im P-Wertpapier-Fall⁷²

Bei einer großen Anzahl von Wertpapieren ist die Effizienzlinie die umhüllende Linie der Fläche möglicher Rendite-Risiko-Kombinationen, ab dem Minimumvarianzportfolio. Denn jede beliebige Portfoliokombination unterhalb der Effizienzlinie würde bei gleichem Risiko eine gerin-

⁶⁸ Vgl. St. A. Ross et al. (2005), S. 270.

⁶⁹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 144f.

⁷⁰ Vgl. A. Stephen et. al. (2005), S. 270.

⁷¹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 145.

⁷² Vgl. eigene Darstellung in Anlehnung an P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 145.

ger erwartete Rendite ergeben, als das Portfolio mit dem gleichen Risikoniveau auf der Effizienzlinie.⁷³

Eine Renditevorgabe bzw. Risikovorgabe führt somit ab dem Minimumvarianzportfolio genau zu einem risikoeffizienten Portfolio mit einem bestimmten Risiko (Ertrag), was folgen lässt, dass ein Zusammenhang zwischen erwarteter Portfoliorendite und Portfoliorisiko besteht.

Ein Investor möchte bei bekannter Risiko-Ertrags-Präferenz einerseits einen möglichst hohen Ertrag und andererseits gleichzeitig ein möglichst geringes Risiko erhalten. Da jedoch nicht gleichzeitig die erwartete Rendite maximiert und das Risiko minimiert werden kann⁷⁴, muss der individuelle trade-off (Austauschverhältnis) zwischen der erwarteter Rendite und dem Risiko festgelegt werden, um das nutzenoptimale Portfolio für einen Investor zu ermitteln.⁷⁵ Um den funktionalen Zusammenhang (trade-off) zwischen Portfolioertrag und Portfoliorisiko zu bestimmen, und somit den Nutzen $U^*(r_{PF}, \sigma_{PF}^2)$ des Investors zu optimieren, wird auf den Ansatz von Rubinstein zurückgegriffen. Demnach lässt sich die Beziehung zwischen erwarteter Rendite, Risiko und dem individuellen Grad an Risikoaversion im (r, σ) -Raum durch einen Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter Θ^k darstellen, welcher wie folgt lautet:

$$U^*(r_{PF}, \sigma_{PF}^2) = \Theta \cdot r_{PF} - \sigma_{PF}^2$$

Löst man diese Gleichung nach der Portfoliorendite auf, dann ergibt sich ein linearer Zusammenhang, welcher im (r, σ) -Raum durch eine Gerade mit dem Anstieg $(1/\Theta)$ dargestellt werden kann. Der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter Θ entspricht dabei genau dem Kehrwert der Steigung jener Nutzenindifferenzkurve, welche die Effizienzkurve im (r, σ^2) -Raum gerade noch tangiert. Wirtschaftlich lässt sich der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter Θ als geforderter Mehrertrag, in Höhe von $(1/\Theta)$, für eine zusätzliche Risikoeinheit interpretieren.

$$r_{PF} = \frac{1}{\Theta} \cdot U^* + \frac{1}{\Theta} \cdot \sigma_{PF}^2 \quad 76$$

$$\sigma_{PF} = (\Theta \cdot r_{PF} - U^*)^{1/2}$$

Damit der individuelle Nutzen für einen Investor maximiert werden kann ist folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

$$L = \Theta \cdot r_{PF} - \sigma_{PF}^2 - \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^N w_i - 1 \right) \rightarrow \max$$

⁷³ Vgl. A. Stephen et. al. (2005), S. 270f.

⁷⁴ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 146f.

⁷⁵ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 562.

⁷⁶ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 147f.

Da sowohl die Portfoliorendite r_{PF} , als auch das Portfoliorisiko σ_{PF}^2 durch die Gewichte bestimmt werden, sind die partiellen Ableitungen nach den Gewichten w_i und des Lagrange-Multiplikators λ zu bilden und gleich 0 zu setzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= \Theta r_1 - 2w_1\sigma_1^2 - 2w_2\sigma_{12} - \dots - 2w_N\sigma_{1N} - \lambda = 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial L}{\partial w_i} &= \Theta r_i - 2w_1\sigma_{i1} - 2w_2\sigma_{i2} - \dots - 2w_i\sigma_{iN} - \lambda = 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial L}{\partial w_N} &= \Theta r_N - 2w_1\sigma_{N1} - 2w_2\sigma_{N2} - \dots - 2w_N\sigma_N^2 - \lambda = 0 \\ \hline \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 1 - w_1 - w_2 - \dots - w_N - 0 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich in der Matrix- bzw. Vektornotation wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \Theta r_1 \\ \vdots \\ \Theta r_N \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & \dots & 2\sigma_{1N} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{N1} & \dots & 2\sigma_{NN} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Zur Vereinfachung kann die Gleichung auch wie folgt definiert werden. C enthält dabei die um die Nebenbedingungen erweiterte Varianz-Kovarianz-Matrix der ersten partiellen Ableitungen.

$$e = \begin{bmatrix} \Theta r_1 \\ \vdots \\ \Theta r_N \\ 1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ \lambda \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & \dots & 2\sigma_{1N} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{N1} & \dots & 2\sigma_{NN} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e - C \times w = 0 \quad \text{bzw.} \quad C \times w = e$$

Multipliziert man die Gleichung mit der inversen Matrix C^{-1} , so ergibt sich:

$$C^{-1} \cdot C \cdot w = C^{-1} \cdot e \quad \text{bzw.} \quad w = C^{-1} \cdot e$$

Die Elemente der inversen erweiterten Varianz-Kovarianz-Matrix haben die Eigenschaft, dass die Zeilen- bzw. Spaltensummen der a_{ij} jeweils 0 ergeben und die Summe der c_i jeweils 1 ist.

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1P} & c_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{P1} & \dots & a_{PP} & c_P \\ c_1 & \dots & c_P & c_{P+1} \end{bmatrix}$$

Die Gewichte w_i^{MVP} des Minimumvarianzportfolios lassen sich direkt aus der letzten Zeile bzw. aus der letzten Spalte der inversen Matrix C^{-1} ablesen. Demnach errechnen sich Ertrag und Varianz des Minimumvarianzportfolios wie folgt:

$$r_{MVP} = \sum_{i=1}^P c_i \cdot r_i = c^T \cdot r$$

$$\sigma_{MVP}^2 = \sum \sum c_i \cdot c_j \cdot \sigma_{ij} = c^T \cdot \Sigma \cdot c$$

Die Lösungsgleichung $w = C^{-1} \cdot e$ ergibt sich daher aus:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ w_P \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1P} & c_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{P1} & \dots & a_{PP} & c_P \\ c_1 & \dots & c_P & c_{P+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta \cdot r_1 \\ \cdot \\ \Theta \cdot r_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vereinfachend können die erwarteten Erträge noch mit den entsprechenden Zeilensummen der inversen Elemente multipliziert werden.

$$d_i = \sum_{j=1}^P a_{ij} \cdot r_j$$

Da c_i und d_i aus der erweiterten inversen Varianz-Kovarianz-Matrix resultieren, kann die Gewichtsstruktur eines Portfolios unter Berücksichtigung des Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameters Θ errechnet werden.

$$w_i = c_i + \Theta \cdot d_i^{77}$$

⁷⁷ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 147ff.

2.5 Kapitalmarktklinie – Portfoliotheorie nach Tobin

Markowitz berücksichtigt in seiner klassischen Portfoliotheorie nur riskante Wertpapiere. Tobin erweiterte den Ansatz von Markowitz um einen risikolosen Finanzierungstitel.⁷⁸ Demnach existiert ein risikoloser Titel, zu welchem jederzeit unbeschränkt Kapital aufgenommen oder angelegt werden kann.⁷⁹ Ein Investor hat nun die Möglichkeit α -Anteile seines Kapitals in das risikolose Wertpapier zu investieren und den Rest $(1-\alpha)$ in ein riskantes Portfolio X . Die erwartete Rendite und das erwartete Risiko ergeben sich somit wie folgt:

$$E(r_{PF}) = \alpha \cdot r_0 + (1-\alpha) \cdot E(r_X)$$

$$\sigma^2(r_{PF}) = \sigma^2(r_0) \cdot \alpha^2 + \sigma^2(r_X) \cdot (1-\alpha)^2 + 2Cov(r_0, r_X) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$$

Nachdem r_0 risikolos ist, sind die Standardabweichung $\sigma(r_0)$ und die Kovarianz $Cov(r_0, r_X)$ gleich 0 und das Portfoliorisiko vereinfacht sich zu $\sigma(r_{PF}) = \sigma(r_X) \cdot (1-\alpha)$.

Löst man die Formel des Portfoliorisikos nach α auf und setzt diese in die Formel der erwarteten Portfoliorendite ein, so erhält man:

$$E(r_{PF}) = \left(1 - \frac{\sigma(r_{PF})}{\sigma(r_X)}\right) \cdot r_0 + \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma(r_{PF})}{\sigma(r_X)}\right)\right] \cdot E(r_X) \rightarrow$$

$$E(r_{PF}) = r_0 + \frac{E(r_X) - r_0}{\sigma(r_X)} \cdot \sigma(r_{PF}).^{80}$$

Der lineare Zusammenhang zwischen einem risikolosen und einem riskanten Portfolio kann grafisch durch eine Gerade, der Kapitalmarktklinie (Capital Market Line), dargestellt werden. Wird Nutzenmaximierung der Investoren unterstellt⁸¹, ist das optimale riskante Portfolio, welches mit dem risikolosen Wertpapier kombiniert wird, jenes, das die Markowitz-Effizienzlinie tangiert.⁸² Unter der Annahme, dass alle Marktteilnehmer homogene Erwartungen hinsichtlich der zukünftigen Renditen und des Risikos aller am Kapitalmarkt angebotenen Wertpapiere haben, ergibt sich für alle Marktteilnehmer die gleiche Effizienzlinie⁸³, und somit auch das gleiche Tangentialportfolio M . Dieses Tangentialportfolio M verkörpert das Marktportfolio, welches sich aus allen risikobehafteten Wertpapieren des Kapitalmarktes zusammensetzt.⁸⁴

⁷⁸ Vgl. E. O. Fischer (2002), S. 54.

⁷⁹ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 22.

⁸⁰ Vgl. E. O. Fischer (2002), S. 55.

⁸¹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 187.

⁸² Vgl. E. O. Fischer (2002), S. 56.

⁸³ Vgl. K. Serfling/M. Marx (1990), S. 366.

⁸⁴ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 251f.

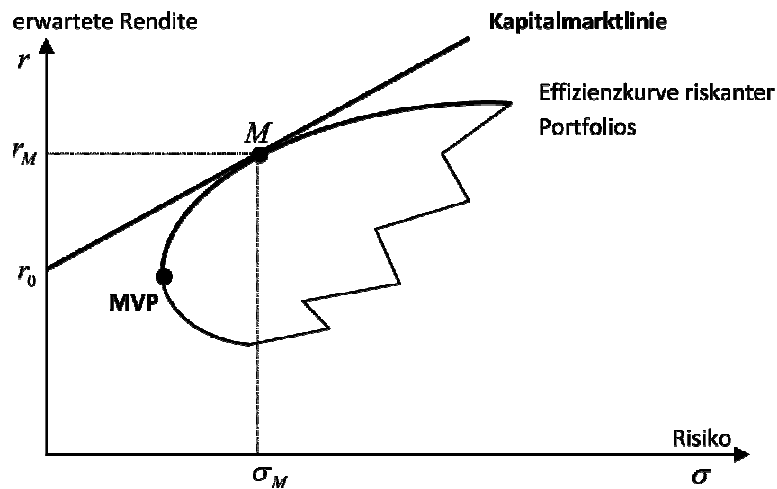


Abbildung 5: Kapitalmarktlinie⁸⁵

Formal lässt sich die Kapitalmarktlinie wie folgt schreiben:

$$E(r_{PF}) = r_0 + \frac{E(r_M) - r_0}{\sigma(r_M)} \cdot \sigma(r_{PF})$$

Die Kapitalmarktlinie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Renditeerwartung und dem Risiko eines Portfolios.⁸⁶ Die Steigung der Kapitalmarktlinie $[E(r_M) - r_0] / \sigma_M$ stellt den Marktpreis des Risikos dar und gibt an, um wie viel sich die Renditeerwartung verändert, wenn sich das Risiko um eine Einheit verändert. Nach der Tobin-Separation werden somit alle Investoren ihr individuelles Portfolio aus dem risikolosen Wertpapier und dem risikobehafteten Marktportfolio zusammenstellen. Sie unterscheiden sich lediglich hinsichtlich der Gewichte. Welches Portfolio für den Investor optimal ist, ergibt sich letztlich wieder aus dem Tangentialpunkt zwischen der Kapitalmarktlinie und der Isonutzenkurve des Anlegers.⁸⁷

2.6 Wertpapierlinie – Capital Asset Pricing Modell

Mit Hilfe des Capital Asset Pricing Modells, können die Gleichgewichtspreise (Marktwerte, Kurse) für einzelne Wertpapiere im Marktportfolio bestimmt werden. Da jedes einzelne risikobehaftete Wertpapier gemäß seinen Anteilen im Marktportfolio vertreten ist, kann sein Wert in Relation zu diesem ausgedrückt werden. Demnach lässt sich ein Portfolio aus x Teilen des Wertpapiers i und $(1-x)$ Teilen des Marktportfolios M bilden, was wieder einem Zwei-

⁸⁵ Vgl. eigene Darstellung in Anlehnung an L. Perridon et al. (2007), S. 252.

⁸⁶ Vgl. K. Serfling/M. Marx (1990), S. 367.

⁸⁷ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 24f.

Wertpapier-Fall gemäß der Portfoliotheorie entspricht. Die Rendite und das Risiko ergeben sich somit wie folgt:

$$E(r_{PF}) = x \cdot E(r_i) + (1-x) \cdot E(r_M)$$

$$\sigma_{PF} = \left[x^2 \sigma_i^2 + (1-x)^2 \sigma_M^2 + 2x(1-x)Cov_{i,M} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Um zu sehen, welche Auswirkungen marginale Veränderungen im Anteil x des Wertpapiers i auf die Rendite und das Risiko des Portfolios haben, leitet man die beiden Gleichungen nach dem Portfoliogewicht x ab.⁸⁸

$$\frac{\partial E(r_{PF})}{\partial x} = E(r_i) - E(r_M)$$

$$\frac{\partial \sigma_{PF}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[x^2 \sigma_i^2 + (1-x)^2 \sigma_M^2 + 2x(1-x)Cov_{i,M} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[2x\sigma_M^2 - 2\sigma_M^2 + 2x\sigma_M^2 + 2Cov_{i,M} - 4xCov_{i,M} \right]$$

Da das Wertpapier i bereits im Marktportfolio M enthalten ist, und eine Preisbestimmung im Gleichgewicht vorgenommen werden soll, ist der Portfolioanteil x des Wertpapiers i gleich 0 zu setzen.

$$\left. \frac{\partial E(r_{PF})}{\partial x} \right|_{x=0} = E(r_i) - E(r_M)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{PF}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} (\sigma_M^2)^{-1} (-2\sigma_M^2 + 2Cov_{i,M}) = \frac{Cov_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

Das marginale Rendite-Risiko-Austauschverhältnis (= Grenzrate der Substitution zwischen Risiko und Rendite) ergibt sich aus dem Verhältnis der beiden Ableitungen⁸⁹, und gibt die zusätzliche Risikohöhe an, wenn sich die Rendite um einen bestimmten Betrag erhöht.

$$\left. \frac{\partial E(r_{PF}) / \partial x}{\partial \sigma_{PF} / \partial x} \right|_{x=0} = \frac{E(r_i) - E(r_M)}{(Cov_{i,M} - \sigma_M^2) / \sigma_M}$$

Im Marktgleichgewicht entspricht die Grenzrate der Rendite-Risiko-Substitution genau der Steigung der Kapitalmarktklinie.

$$\frac{E(r_M) - r_0}{\sigma_M} = \frac{E(r_i) - E(r_M)}{(Cov_{i,M} - \sigma_M^2) / \sigma_M}$$

⁸⁸ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 25.

⁸⁹ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 254f.

Löst man die Gleichung nach der Renditeerwartung des Wertpapiers i auf, so erhält man die Wertpapierlinie (Security Market Line), die auch als Capital Asset Pricing Modell (CAPM) bekannt ist.

$$E(r_i) = r_0 + [E(r_M) - r_0] \cdot \frac{Cov_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad 90$$

Die Gleichgewichtsrendite eines einzelnen Wertpapiers ergibt sich demnach aus einem risikolosen Zinssatz, zuzüglich einer Risikoprämie für das nicht diversifizierbare systematische Risiko.⁹¹ Das restliche, unsystematische Risiko kann durch Diversifikation vollständig eliminiert werden. Die Risikoprämie errechnet sich aus dem Marktpreis des Risikos $[E(r_M) - r_0]$ multipliziert mit der Höhe des Risikos $Cov_{i,M} / \sigma_M^2$ und wird auch als Betafaktor β bezeichnet.⁹²

$$\beta_i = \frac{Cov_{i,M}}{\sigma_M^2} = korrr_{i,M} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

Unter Verwendung von Beta ergibt sich für die Wertpapierlinie (CAPM) folgende Gleichung:

$$E(r_i) = r_0 + [E(r_M) - r_0] \cdot \beta_i \quad 93$$

Die Wertpapierlinie zeigt den linearen Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite eines einzelnen Wertpapiers r_i und der Marktrendite r_M . Der Betafaktor bestimmt dabei das Ausmaß, um wie viel sich die Rendite eines einzelnen Wertpapiers r_i verändert, wenn sich die Rendite des Marktes verändert.

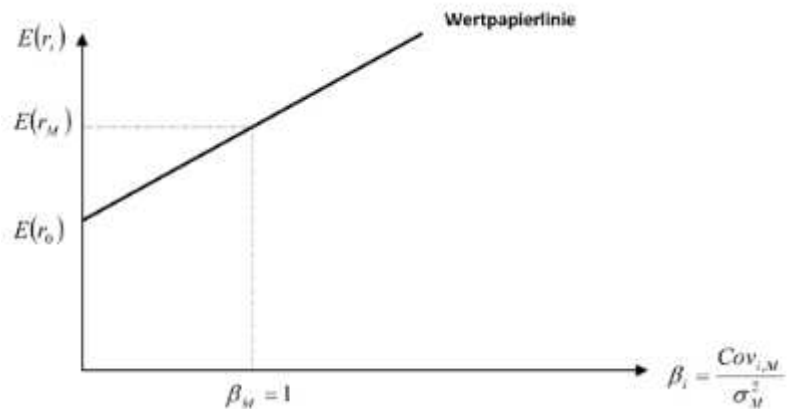


Abbildung 6: Wertpapierlinie⁹⁴

Das Marktportfolio besitzt einen Betafaktor von 1. Die risikolose Anlage r_0 korreliert nicht mit den Renditeerwartungen des Marktes, besitzt somit kein systematisches Risiko und hat demnach einen Betafaktor von 0. Besitzt ein Wertpapier einen Betafaktor größer als 1, dann

⁹⁰ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 26.

⁹¹ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 193.

⁹² Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 26f.

⁹³ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 255.

⁹⁴ Vgl. eigene Darstellung in Anlehnung an M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 27.

reagiert sie überproportional auf die Entwicklungen des Marktes. Bei einem Betafaktor kleiner als 1 reagiert sie unterproportional.⁹⁵

Grundsätzlich gilt, je größer der Betafaktor, desto höher ist auch das Anlagerisiko bzw. die Anlagechance und desto höher fallen auch die Renditeforderungen der Investoren entsprechend des CAPM aus.⁹⁶

2.7 Diversifikationseffekt

Eine bedeutende Erkenntnis die auf die Arbeit von Markowitz zurück zu führen ist, ist der Diversifikationseffekt, welcher sich ergibt, wenn man sein Vermögen in mehrere verschiedene riskante Wertpapiere investiert. Betrachtet man ein gleichgewichtetes Portfolio, d.h. jedes Wertpapier ist mit gleichem Anteil ($1/N$) im Portefeuille enthalten⁹⁷, so kann gezeigt werden, dass das Risiko rein durch die Anzahl der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere beeinflusst wird. Diese Erkenntnis basiert darauf, dass durch jedes zusätzlich aufgenommene Wertpapier ins Portefeuille, das Risiko durch die Kovarianzeigenschaft gesenkt werden kann.⁹⁸ Enthält das Portfolio nun eine große Anzahl von verschiedenen Wertpapieren, dann wird das Risiko umso geringer, je mehr Anlagetitel man in das Portfolio aufnimmt. Verantwortlich für diesen Effekt ist, dass sich das Portfoliorisiko aus N Einzelvarianzen aber $(N^2 - N)$ Kovarianzen zusammensetzt. Das hat zur Folge, dass die Einzelvarianzen bei einer großen Anzahl von Anlagetiteln in einem Portefeuille eine wesentlich geringere Bedeutung haben, als die Kovarianzen. Diese Eigenschaft bewirkt, dass das Portfoliorisiko zwar nicht gänzlich eliminiert, aber zumindest um einiges reduziert werden kann. Um welchen Umfang das Risiko vermindert werden, kann ist wiederum vom linearen Zusammenhang (Korrelation) abhängig, der zwischen den einzelnen Wertpapieren besteht.⁹⁹

Sind Renditen vollständig positiv korreliert (Korrelationskoeffizient beträgt genau +1), dann entspricht das Portfoliorisiko genau dem gewichteten Durchschnitt der Einzelrisiken die im Portfolio enthalten sind. Das hat zur Folge, dass auch durch die Bildung eines Portfolios kein Diversifikationseffekt erzielt werden kann. Korrelieren die Renditen hingegen vollkommen negativ (Korrelationskoeffizient beträgt genau -1), dann kann der maximale Diversifikationsvorteil erreicht werden.¹⁰⁰ Das bedeutet, solange der Korrelationskoeffizient einen geringeren Wert als +1 annimmt, ist das Risiko eines Portfolios aufgrund des Diversifikationseffekts geringer, als die Summe der gewichteten Einzelvarianzen.¹⁰¹

⁹⁵ Vgl. K. Serfling/M. Marx (1990), S. 368.

⁹⁶ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 256.

⁹⁷ Vgl. R. A. Brealey/St. Myers (2003), S. 332.

⁹⁸ Vgl. P. Steiner/H. Uhlir (2000), S. 147.

⁹⁹ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 159.

¹⁰⁰ Vgl. L. Kruschwitz (2009), S. 352.

¹⁰¹ Vgl. A. Stephen et. al. (2005), S. 265.

3. Schwächen der klassischen Portfoliotheorie und alternative Ansätze

Die traditionelle Methode nach Markowitz weist auch einige nicht zu vernachlässigbare Schwächen auf. Oftmals performen naive Portfoliozusammensetzungsregeln, wie zum Beispiel die naive Diversifikation¹⁰², besser als Portfolios, welche nach der Markowitz-Theorie zusammengestellt wurden.¹⁰³ Da die Mittelwert-Varianz-Optimierung nicht immer ein geeignetes Rahmenwerk für die Ermittlung von optimalen Portfolios darstellt, werden die Schwächen und alternative Optimierungsverfahren nachfolgend kurz dargestellt.

3.1 Schwächen der klassischen Portfoliotheorie

3.1.1 Schätzfehler in den Eingabegrößen

Bei der klassischen Portfoliotheorie nach Markowitz stützt man sich auf der Annahme, dass die erforderlichen Inputparameter mit Sicherheit aus den Zeitreihen von historischen Renditen geschätzt werden können und diese den wahren Parametern entsprechen. Dabei wird das in den Parametern inhärente Schätzrisiko gänzlich vernachlässigt.¹⁰⁴

Da die wahren Werte der Inputparameter dem Investor nicht bekannt sind, werden diese typischerweise durch Stichprobenwerte, welche sich aus historischen Renditerealisationen schätzen lassen, ersetzt.¹⁰⁵ Weil die Stichprobengröße das Schätzergebnis wesentlich beeinflusst, muss diese so festgelegt werden, dass die Schätzungen statistisch zuverlässig sind und irrelevante Daten nicht verwendet werden.¹⁰⁶ Da die Schätzungen für die erwarteten Renditen und Varianzen auf vergangenem Datenmaterial beruhen, sind diese zwangsläufig einem Schätzfehler ausgesetzt¹⁰⁷ und mit Unsicherheit behaftet.¹⁰⁸ Bei der Optimierung nach Markowitz werden folglich Wertpapiere mit hohen Renditen, kleinen Varianzen und negativen Korrelationen bedeutsam überbewertet, und jene Wertpapiere mit kleinen Renditen, großen Varianzen und positiven Korrelationen unterbewertet. Genau bei diesen Wertpapieren ist es am wahrscheinlichsten, dass sie große Schätzfehler beinhalten und die Prognosen daher nicht präzise sind.¹⁰⁹ Desweiteren ist zu beachten, dass die Schätzfehler in den erwarteten Renditen wesentlich stärkeren Einfluss auf die Mittelwert-Varianz-Optimierung haben als die Schätzfeh-

¹⁰² Vgl. J.D. Jobson/B. Korkie (1981), S. 70.

¹⁰³ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 31.

¹⁰⁴ Vgl. Ph. Jorion (1986), S. 279.

¹⁰⁵ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 31.

¹⁰⁶ Vgl. J.D. Jobson/B. Korkie (1981), S. 70f.

¹⁰⁷ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 33f.

¹⁰⁸ Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 330.

¹⁰⁹ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 33f.

ler in der Varianz-Kovarianz-Matrix. Der Einfluss des Schätzfehlers auf die Optimierung kann durch verschiedene Ansätze reduziert werden, welche zusätzlich den günstigen Nebeneffekt aufweisen, besser diversifizierte Portfoliogewichte zu erhalten.¹¹⁰

Eine entscheidende Schwäche des Mittelwert-Varianz-Ansatzes ist daher, dass die wahren Inputparameter für ein Wertpapier nicht zuverlässig prognostiziert werden können, was zur Folge hat, dass auch der wahre Ertrag und das wahre Risiko für das optimale Portfolio nicht zuverlässig vorhergesagt werden können.¹¹¹

Historische Renditen eignen sich somit nicht zur Prognose zukünftiger Renditerealisationen, weil historische Daten nur mit erheblichen Schätzfehlern gemessen werden können. Die Schätzfehler können zwar durch eine größere Datenstichprobe gemindert werden, allerdings stellt das zur Verfügung stehende Datenmaterial eine bindende Restriktion dar. Jobson/Korkie (1981) und Michaud (1989) sprechen im Rahmen der klassischen Portfoliooptimierung sogar von Schätzfehlermaximierung, denn das Verfahren neigt dazu, Wertpapier mit extremen Ausprägungen höher zu gewichten.¹¹²

3.1.2 Normalverteilte Renditen und quadratische Nutzenfunktion

Im Modell von Markowitz wird davon ausgegangen, dass die Nutzenfunktion und das optimale Portfolio eines Investors durch die ersten beiden Momente einer Verteilungsfunktion (Mittelwerte und Varianz), und somit durch eine quadratische Nutzenfunktion bestimmt werden können.¹¹³ In der Realität ist es jedoch nicht möglich die individuellen Präferenzen und somit die persönliche Nutzenfunktion eines Investors eindeutig zu quantifizieren.¹¹⁴ Auch die Annahme von normalverteilten Renditen kann in der realen Anlagepraxis nicht gehalten werden, was bereits von mehreren statistischen Untersuchungen bewiesen werden konnte.¹¹⁵

Ein weiterer Schwachpunkt ist dadurch gegeben, dass die Standardabweichung als Risikomaß bei der Optimierung verwendet wird. Diese bildet jedoch nur dann das Risiko des Investors adäquat ab, wenn die Wertpapierrenditen normalverteilt sind und die Annahme des „random walk“ gegeben ist. Der Wert und der aktuelle Marktpreis eines Wertpapiers stimmen nur in vollkommenen Kapitalmärkten exakt überein. Da der Wert einer Aktie in der Realität meist vom Preis einer Aktie (Börsenwert) erheblich abweicht, kann die Annahme, dass der Kapitalmarkt vollkommen ist, nicht gehalten werden.¹¹⁶

3.1.3 Informationsaggregation

Eine weitere Schwäche ist dadurch gegeben, dass Portfoliomanager sich aufgrund der extrem umfangreichen und spezifischen Anlagetitel des Marktes, nur auf ein bestimmtes Anlagesegment spezialisieren müssen, und somit nur für eine begrenzte Anzahl von Vermögensge-

¹¹⁰ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 35.

¹¹¹ Vgl. J.D. Jobson/B. Korkie (1981), S. 70.

¹¹² Vgl. W. Drobetz (2002), S. 9f.

¹¹³ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 5.

¹¹⁴ Vgl. Th. Heidorn et al. (2007), S. 13.

¹¹⁵ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 2.

¹¹⁶ Vgl. W. Gleißner (2010), S. 1f.

genstände subjektive Erwartungen formulieren können.¹¹⁷ Zusätzlich zum vorhandenen Schätzrisiko¹¹⁸ ist auch der enorme Aufwand bei der Datenerhebung zu beachten.¹¹⁹ Neben den Renditen und Varianzen müssen auch die Korrelationen zwischen den Wertpapieren, welche sich im Zeitverlauf ändern, geschätzt werden. Dieser Umstand wird bei der Markowitz-Theorie nicht berücksichtigt, weshalb die klassische Optimierung häufig zu Fehlallokationen führt.

3.1.4 Sensibilität der Portfolioallokation und Mehrdeutigkeit der Daten

Die wesentlichsten Schwächen der Mittelwert-Varianz-Optimierung sind jedoch¹²⁰ die extremen Portfolioallokationen¹²¹, die hohe Sensibilität der Portfoliogewichte hinsichtlich der Inputdaten und die Mehrdeutigkeit, welche sich aus den Schätzungen der vergangenen Daten ergibt.¹²² Da die optimalen Portfolios nach Markowitz einzelne Wertpapiere oftmals sehr hoch gewichten, kommt es häufig zu extremen, ökonomisch unplausiblen Portfolioallokationen bzw. Randlösungen („corner solution“)¹²³, die in der Praxis nicht umgesetzt werden können.¹²⁴ Daneben reagieren die Portfoliogewichte extrem sensibel auf Schätzfehler¹²⁵, was zur Folge hat, dass bereits sehr geringe Veränderungen der Inputdaten zu großen Veränderungen in allen Portfoliogewichten führen.¹²⁶ Um diese Instabilität zu reduzieren, können neben der Budgetrestriktion (d.h. die Summe aus allen Portfoliogewichten muss immer 1 ergeben) und der Nichtnegativitätsbedingung (d.h. alle Portfoliogewichte müssen positiv sein und daher sind Leerverkäufe nicht zulässig)¹²⁷, zusätzliche Nebenbedingungen in die Optimierung implementiert werden.¹²⁸

Ein weiterer Kritikpunkt der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung besteht darin, dass es keine eindeutigen optimalen Lösungen gibt, sondern, dass vielmehr eine unbeschränkte Anzahl von statistisch äquivalenten Portfolios existiert.¹²⁹ Wie bereits bekannt ist, wird die Effizienzlinie aus vergangenen Renditerealisationen geschätzt, welche wiederum starken Schwankungen ausgesetzt sind. Aufgrund dieser Veränderlichkeit der geschätzten Inputdaten gibt es viele Portfolios, die statistisch genau so effizient sind, wie jene auf der Effizienzlinie.¹³⁰ Die statistisch äquivalenten Portfolios können sich jedoch hinsichtlich ihrer Struktur grundlegend von den Portfolios entlang der Effizienzkurve unterscheiden.¹³¹

¹¹⁷ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 2.

¹¹⁸ Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 330.

¹¹⁹ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 2.

¹²⁰ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 5.

¹²¹ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 6.

¹²² Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 5.

¹²³ Vgl. J. Viebig et al (2009), S. 727.

¹²⁴ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 6.

¹²⁵ Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 332.

¹²⁶ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 5.

¹²⁷ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 9.

¹²⁸ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 9.

¹²⁹ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 35.

¹³⁰ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 6.

¹³¹ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 35f.

3.2 Alternative Risikomaße

In der klassischen Portfoliotheorie fließt die Varianz, welche sowohl die Abweichungen über, als auch unter dem Mittelwert erfasst, in die Optimierung ein. Aus Sicht des Investors werden allerdings die Schwankungen über dem Mittelwert oftmals nicht als Risiko angesehen¹³², und daher erscheint es plausibler, lediglich die Schwankungen unterhalb des Mittelwertes in den geschätzten Varianzen zu berücksichtigen.¹³³ Ein alternatives Risikomaß wäre die Semivarianz bzw. die Semistandardabweichung. Da sie nur die ungünstigen Abweichungen vom Mittelwert („downside risk“) berücksichtigt, erscheint sie vorerst als geeigneteres Risikomaß für die Portfoliooptimierung. Ob die Verwendung von alternativen Risikomaßen wie z.B. die Semivarianz für die Optimierung vorteilhaft ist, hängt aber immer von der Symmetrie der Renditeverteilung ab.¹³⁴ So ist bei symmetrischen Verteilungen die theoretische Semivarianz halb so groß wie die Varianz – demnach liefert die Berechnung der Semivolatilität auch keine neuen Erkenntnisse und die Volatilität als Risikomaß wäre vollkommen ausreichend. Bei asymmetrischen Renditen hingegen, kann die Verwendung der Semivarianz und -volatilität hingegen neue Informationen liefern und somit durchaus sinnvoll sein.¹³⁵ Bei der Berechnung der alternativen Risikomaße ist jedoch zu berücksichtigen, dass sich auch diese nur sehr schwer exakt schätzen lassen.

3.3 Maximierung der Nutzenfunktion

Die Markowitz-Optimierung stimmt genau dann mit der Maximierung der erwarteten Nutzenfunktion überein, wenn zumindest eine der beiden Bedingungen erfüllt ist: normalverteilte Renditen oder eine quadratische Nutzenfunktion. Da beiden Bedingungen in der Realität nicht erfüllt sind, ist die Mittelwert-Varianz-Optimierung folglich auch nicht konsistent mit der Maximierung der erwarteten Nutzenfunktion. Die Maximierung der erwarteten Nutzenfunktion lässt sich in der Praxis auch nur begrenzt umsetzen. So sind einerseits die Nutzenfunktionen der Investoren unbekannt und andererseits gibt es kaum durchführbare Algorithmen um die effizienten Portfolios zu errechnen. Desweiteren führen bereits sehr geringe Schätzfehler bei den Nutzenfunktionsparametern zu bedeutenden Veränderungen des optimalen Portfolios.¹³⁶

Für die Mittelwert-Varianz-Optimierung gibt es hingegen eine große Auswahl von Optimierungsalgorithmen, welche „exakte“ (quadratischen Programmierung) oder „approximative“ optimale Lösungen bieten.

Mit Hilfe der quadratischen Programmierung kann die gesamte Mittelwert-Varianz-Effizienzlinie und eine exakte Lösung, auch unter Berücksichtigung von Transaktionskosten,

¹³² Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 20.

¹³³ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 121.

¹³⁴ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 21.

¹³⁵ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 133.

¹³⁶ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 20ff.

errechnet werden. Jedoch eignet sich dieses Verfahren nur für eine relative kleine Stichprobengröße und die Berechnungen für das optimale Portfolio nehmen einige Zeit in Anspruch.

Approximierte Mittelwert-Varianz-Algorithmen sind in der Lage auch bei einem großen Stichprobenumfang und unter Einbeziehung von Transaktionskosten, sowie anderen Faktoren eine angenäherte Lösung zu errechnen. Die wesentliche Beschränkung bei diesen Verfahren besteht jedoch darin, dass keine exakten Lösungen, sondern lediglich ein einzelnes optimales Portfolio errechnet werden kann, welches sich lediglich in der Nähe der Mittelwert-Varianz-Effizienzlinie befindet.¹³⁷

Die Markowitz-Optimierung kann aber als gute Annäherung für die Maximierung der erwarteten Nutzenfunktion gesehen werden, und wird deshalb häufig in der Praxis zur Portfoliooptimierung verwendet.

3.4 Mehrperiodiger Planungshorizont

Formal ist die Mittelwert-Varianz-Optimierung nach Markowitz ein einperiodiges Optimierungsmodell. Allerdings verfolgen einige Investoren langfristige Investitionsziele und benötigen daher auch mehrperiodige Optimierungsmodelle. Für kurzfristige Planungshorizonte eignet sich die Mittelwert-Varianz-Optimierung als zuverlässige Annäherung an die Nutzenfunktionsoptimierung. Verlängert man hingegen den Planungshorizont, dann reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Perioden und dadurch verringert sich auch die statistische Aussagekraft der Schätzparameter.

Ein alternativer Ansatz wäre, die mehrperiodige Verteilung der geometrischen Mittelwertrendite zu verwenden.¹³⁸ Bei der geometrischen Durchschnittsrendite geht man davon aus, dass die Renditen identisch reinvestiert werden – die einzelnen Renditen sind multiplikativ über den Planungshorizont hinweg miteinander zu verknüpfen.¹³⁹

Markowitz zeigte in seiner Arbeit, dass effiziente Portfolios für den langfristigen Planungshorizont nicht effizient sein müssen, und dass langfristige Effizienz für das Portfoliorisiko nicht notwendig ist. Diese Erkenntnisse werden auch von einigen Studien unterstützt. Sie alle kommen zum Ergebnis, dass die einperiodigen Portfolios auf der Markowitz-Effizienzlinie oftmals eine gute Annäherung an die mehrperioden effizienten Portfolios des geometrischen Mittels sind.¹⁴⁰

¹³⁷ Vgl. R. O. Michaud (1989), S. 36.

¹³⁸ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 23.

¹³⁹ Vgl. P. Steiner/Uhlir (2000), S. 129f.

¹⁴⁰ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 24f.

3.5 Lineare Programmierung

Eine weitere Alternative zur klassischen Portfoliotheorie nach Markowitz wäre die Portfolioogewichte im Optimierungsprozess einzuschränken.¹⁴¹ Die lineare Programmierung ist ein Spezialfall der quadratischen Programmierung und beinhaltet keine Portfoliovarianz. Bei diesem Verfahren wird die erwartete Portfoliorendite unter Berücksichtigung einiger linearen Gleichheits- und Ungleichheitsbedingungen maximiert.¹⁴² Portfoliomanager können in der Praxis nur beschränkt leerverkaufen oder Fremdkapital aufnehmen und werden häufig durch Leerverkaufsverbote¹⁴³, Gewichts- oder Industriebeschränkungen eingeschränkt. Durch Integration der linearen Nebenbedingungen kann eine Überkonzentration in einzelne Wertpapiere vermieden werden, wodurch sich die lineare Programmierung als angemessenes Werkzeug für erfahrene Analysten und Investoren eignet.¹⁴⁴ Die Beschränkungen vermindern den Effekt, dass extreme Informationen durch Manager missbräuchlich verwendet werden. Beschränkte Portfoliooptimierung trägt daher dazu bei, die Volatilität zu vermindern, die Effektivität zu erhöhen und das nachteilige Risiko zu vermindern.¹⁴⁵

¹⁴¹ Vgl. J. Frank et al. (2006), S. 270 f.

¹⁴² Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 27f.

¹⁴³ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 35.

¹⁴⁴ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 28.

¹⁴⁵ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 36.

4. „resampled efficiency“

Das klassische Konzept von Markowitz greift bei der Berechnung für die benötigten Inputparameter auf historische Daten zurück. Die geschätzten Renditen, Varianzen und Kovarianzen sind mit Unsicherheit behaftet und unterliegen einem Schätzrisiko, welches bei der Markowitz-Optimierung jedoch nicht berücksichtigt wird.¹⁴⁶ Investoren neigen dazu, jene Wertpapiere auszuwählen, welche die attraktivsten Eigenschaften aufweisen. Das bedeutet, sie werden Wertpapiere mit großen geschätzten Renditen, kleinen geschätzten Varianzen und negativ geschätzten Korrelationen in der Portfoliogestaltung übergewichten, und Wertpapiere mit geringen geschätzten Renditen, großen geschätzten Varianzen und positiv geschätzten Korrelationen untergewichten oder gänzlich aus dem Portfolio ausscheiden.¹⁴⁷ Der Schätzfehler ist jedoch genau bei diesen Wertpapieren am größten. Jobson/Korkie und Michaud behaupten, dass der Schätzfehler durch die klassische Optimierung nach Markowitz maximiert wird und es dadurch oftmals zu extremen, ökonomisch unplausiblen Lösungen kommt.¹⁴⁸

Ein geeignetes heuristisches Lösungsverfahren, um aus unsicheren Informationen optimale effiziente Portfolios zu gestalten, bietet nach Michaud die „resampled efficiency“.¹⁴⁹ Bei diesem Verfahren werden aus historischen Daten mittels Monte-Carlo-Simulation oder Bootstrapping erwartete Renditen und Kovarianzen geschätzt, und Zeitreihen generiert.

Bei der traditionellen Mittelwert-Varianz-Optimierung werden die Optimierungsparameter aus lediglich einer möglichen Realisierung, der beobachteten vergangenen Renditedaten in Form einer Punktschätzung ermittelt. Selbst bei extrem großen Stichprobenumfängen kann durch diese Vorgehensweise nicht gewährleistet werden, dass die Schätzungen den wahren Verteilungsparametern entsprechen.¹⁵⁰ Zieht man erneut aus der Renditeverteilung (resampling), dann ergeben sich neue, statistisch äquivalente Inputparameter für die anschließende Optimierung.¹⁵¹ Um diese Variabilität der historischen Daten zu umgehen, zieht Michaud mehrmals aus der Renditeverteilung, errechnet die jeweiligen Inputparameter und die dazugehörigen Effizienzkurven und ermittelt anschließend aus allen errechneten Effizienzkurven die „resampled efficiency“.¹⁵²

¹⁴⁶ Vgl. U.Herold/R. Maurer (2002), S. 330.

¹⁴⁷ Vgl. B. Scherer (2002), S. 98.

¹⁴⁸ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 36; J.D. Jobson/B. Korkie (1981), S. 70.

¹⁴⁹ Vgl. R. Michaud (2002), S. 2.

¹⁵⁰ Vgl. B. Scherer (2002), S. 98.

¹⁵¹ Vgl. U.Herold/R. Maurer (2002), S. 332.

¹⁵² Vgl. R. Michaud (2002), S. 4.

4.1 „resampling“ – Monte-Carlo-Simulation

Bei der Monte-Carlo-Simulation werden nicht tatsächliche Beobachtungen, sondern künstliche Zufallsvariablen erzeugt, um eine Situation zu analysieren bzw. zu modellieren. Werden künstliche Renditen generiert, dann ist der Monte-Carlo-Simulation eine Verteilung mit bestimmten Parametern zugrunde zu legen. Obwohl zahlreiche empirische Untersuchungen gezeigt haben, dass sich Renditen meist linksschief und leptokurtisch verhalten, wird dennoch häufig die Normalverteilung angenommen. Man sollte sich bei der Anwendung aber bewusst sein, dass inkorrekte Verteilungsannahmen zu verzerrten oder sogar nutzlosen Ergebnissen führen können. Daher sollten vor Durchführung der Monte-Carlo-Simulation die Annahmen hinsichtlich der Verteilung sorgfältig geprüft werden.¹⁵³

Michaud geht bei seinem Verfahren nach folgenden Schritten vor:

1. Zuerst sind die empirischen Renditemittelwerte $\hat{\mu}_i$ und die empirische Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}_i$ für einen bestimmten Stichprobenzeitraum T aus der Historie zu ermitteln.
2. In einem nächsten Schritt ist die Effizienzkurve, bestehend aus K Portfolios, für die errechneten Inputparameter, unter Berücksichtigung der Zielfunktion und den Nebenbedingungen des Investors zu berechnen.¹⁵⁴ Die berechneten Portfolios werden von 1 bis K durchnummeriert, wobei das Minimumvarianzportfolio den Rang 1 erhält und das Portfolio mit der maximalen Rendite den Rang K . Die Distanz zwischen dem Minimumvarianzportfolio und dem renditestärksten Portfolio wird in gleiche Teilstrecken zerlegt und erhält einen Rang, abhängig von seiner erwarteten Rendite.¹⁵⁵
3. Anschließend wird unter der Annahme einer mehrdimensionalen Normalverteilung für jedes Wertpapier ein Renditepfad über T Perioden simuliert. Daraus werden erneut Renditemittelwerte, Varianzen und Korrelationen geschätzt, aus welchen wieder K effiziente Rendite-Risiko-Kombinationen (Effizienzkurven) abgeleitet werden.
4. Der Schritt 3 ist genügend oft zu wiederholen. Michaud empfiehlt um die 500 Wiederholungen. Von diesen K mal 500 simulierten Portfolios werden anschließend Rendite und Risiko berechnet.¹⁵⁶ Bei den simulierten Rendite-Risiko-Kombinationen handelt es sich um statistisch äquivalente Portfolios¹⁵⁷, welche zusammen die sogenannte „statistische Äquivalenzregion“ bilden. Aufbauend auf der statistischen Äquivalenzregion kann eine Konfidenzregion ermittelt werden. Alle Portfolios innerhalb dieser Konfidenzregion können als effizient bezeichnet werden und weisen sehr ähnliche Risiko-Renditestrukturen auf. Sie können sich aber wesentlich in ihren Gewichtungen voneinander unterscheiden.¹⁵⁸

¹⁵³ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 167ff.

¹⁵⁴ Vgl. Ph. Jorion (1992), S. 70.

¹⁵⁵ Vgl. B. Scherer (2002), S. 99.

¹⁵⁶ Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 332.

¹⁵⁷ Vgl. B. Scherer (2002), S. 99.

¹⁵⁸ Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 332.

5. Abschließend werden die K „resampled efficient“ Portfoliogewichte ermittelt. Sie berechnen sich aus dem Durchschnitt aller simulierten Portfoliogewichte.¹⁵⁹ Jedes Portfolio entlang der „resampled efficient frontier“ ist somit der Durchschnittswert aus einer Anzahl von statistisch äquivalenten effizienten Portfolios.¹⁶⁰

$$\bar{w}_{RE} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_{K,i}$$

4.2 „resampling“ – Bootstrapping

Alternativ zu Michauds Vorgehensweise kann auch das Bootstrapping-Verfahren zur Ermittlung der „resampled“ Effizienzportfolios angewendet werden. Bei dieser Methode werden nicht wie bei der Monte-Carlo-Simulation neue Renditepfade simuliert, sondern tatsächlich realisierte Renditen aus den historischen Daten zufällig gezogen und wieder zurückgelegt. Der wesentliche Vorteil bei diesem Ansatz besteht darin, dass die Eigenschaften der empirischen Renditeverteilung erhalten bleiben. Allerdings ist bei der Bootstrapping-Methode auf den gewählten Zeithorizont und die Datenqualität zu achten, da diese die Ergebnisse wesentlich beeinflussen.¹⁶¹

4.3 „resampled efficient frontier“

Die „resampled“ Effizienzkurve ist nun keine einzelne Linie mehr, sondern eine Ansammlung von sich überschneidenden Punktwolken.¹⁶² Die große Streuung der „resampled“ Portfolios entsteht aufgrund der großen Variabilität der statistisch äquivalenten Inputdaten.¹⁶³

Da alle simulierten Effizienzkurven gleich wahrscheinlich sind, ergibt sich bei der „resampled efficiency“ für einen stark risikoaversen Investor das Minimumvarianzportfolio aus dem Durchschnitt der Portfoliogewichte aller simulierter Minimumvarianzportfolios. Für einen risikoindifferenten Investor ergibt sich daher das optimale Portfolio aus dem Durchschnitt der Portfoliogewichte aller simulierter Portfolios mit der maximalen Rendite und für einen nutzenmaximalen Investor als Durchschnitt der Portfoliogewichte aller simulierter nutzenmaximaler Tangentialportfolios. Die „resampled efficient frontier“ beinhaltet alle möglichen optimalen „resampled“ Effizienzportfolios entsprechend der Risikoaversionsparameter der Investoren. Es lässt sich erkennen, dass es kaum Unterschiede zwischen dem Minimumvarianzportfolio der klassischen Portfolio und der „resampled efficiency“ gibt. Nimmt die

¹⁵⁹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 305.

¹⁶⁰ Vgl. R. Michaud (2002), S. 5.

¹⁶¹ Vgl. M. Busack/D.G. Kaiser (2006), S. 732.

¹⁶² Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 333.

¹⁶³ Vgl. B. Scherer (2002), S. 99.

Risikoaversion ab, dann unterscheiden sich auch die Portfoliogewichtungen zwischen „resampled efficiency“ und klassischer Portfoliotheorie zunehmend.¹⁶⁴

4.4 Eigenschaften der „resampled efficient frontier“ Portfolios

Die „resampled efficiency“ weist einige attraktive Eigenschaften auf. Die Portfolios sind wesentlich besser diversifiziert, weniger riskant und aufgrund der Durchschnittsberechnung sehr stabil. Kleine Veränderungen der Inputdaten wirken sich daher grundsätzlich nur sehr gering auf die optimale Portfoliostruktur aus. Desweiteren berücksichtigt dieses Verfahren die Unsicherheit hinsichtlich der Informationen, ohne dass dafür Beschränkungen eingeführt werden müssen. Laut Michaud kann im Durchschnitt mit dem „resampled efficiency“ Verfahren sogar die Performance erhöht werden.¹⁶⁵

Andererseits führt die Durchschnittsbildung aber dazu, dass die „resampled“ Effizienzkurve immer unterhalb von der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung verläuft.¹⁶⁶ Die „resampled efficient frontier“ erscheint daher auf den ersten Blick als inferior, weil sie eine geringere Rendite erwarten lässt und der Risikobereich im Vergleich zur klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung eingeschränkt ist.¹⁶⁷ Der Grund dafür besteht darin, dass die „resampled efficient“ Portfolios aus historischen Daten geschätzt werden und die Schätzfehler so direkt mit in die optimalen Portfoliogewichte eingearbeitet werden.¹⁶⁸ Gäbe es keine Variabilität in den Schätzungen, dann würden alle simulierten „resampled“ Effizienzlinien genau der Effizienzkurve nach Markowitz entsprechen. Allerdings würde die „resampled efficient frontier“ dann auch keinen höheren Diversifikationsgrad als die klassische Mittelwert-Varianz-Optimierung erzielen.

Ist man sich zu 100% hinsichtlich seiner Rendite-Risiko-Schätzungen sicher, dann ist die klassische Markowitz-Optimierung ein angemessenes Verfahren zur Portfolioauswahl. Eine 100%ige Sicherheit entspricht aber wohl kaum der Realität. Die „resampled efficient frontier“ berücksichtigt hingegen Informationsunsicherheit und ist folglich der klassischen Portfoliooptimierung vorzuziehen.

Sind Investoren stark risikoavers und streben nach dem Minimumvarianzportfolio, dann liefern die klassische Portfoliooptimierung und die „resampled efficient frontier“ ähnliche Ergebnisse. Risikofreudige Investoren streben hingegen nach höheren erwarteten Renditen und sind bereit dafür ein höheres Risiko zu tragen. Die „resampled efficient frontier“ liefert hier aufgrund des größeren Diversifikationsgrades deutlich bessere und intuitivere Allokationen.

¹⁶⁴ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 43f.

¹⁶⁵ Vgl. R. Michaud (2002), S. 5.

¹⁶⁶ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 306.

¹⁶⁷ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 45.

¹⁶⁸ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 306.

Abschließend kann nochmal festgehalten werden, dass die „resampled efficient frontier“ die Informationsunsicherheit reduziert, sie wird aufgrund der Durchschnittswertberechnungen weniger stark von einzelnen Inputdaten beeinflusst und führt zu stabileren und zuverlässigeren Lösungen. Für den höheren Diversifikationsgrad muss allerdings eine geringere erwartete Rendite als bei der klassischen Portfoliotheorie nach Markowitz in Kauf genommen werden.

Der „resampled efficiency“ Ansatz mag zwar die Schätzfehlerproblematik verdeutlichen, allerdings konnte anhand mehrerer „out-of-sample“ Vergleiche keine bessere Performance im Vergleich zur klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung festgestellt werden. Der Grund besteht vermutlich darin, dass die simulierten „resampled efficient“ Portfolios aus den gleichen historischen Daten geschätzt werden wie die Inputparameter der klassischen Portfoliooptimierung. Weichen diese Schätzungen von den wahren Parametern und Gewichten ab, dann weichen folglich auch die „resampled“ Portfolios von der wahren Portfoliostruktur ab.¹⁶⁹

¹⁶⁹ Vgl. R. O. Michaud/R. O. Michaud (2008), S. 38ff.

5. „shrinkage“-Verfahren

Bei der Schätzfehlerproblematik stellt sich die Frage, ob es nicht sinnvoller wäre die Unsicherheit bezüglich der Inputparameter vor dem Optimierungsprozess zu berücksichtigen. Eine Möglichkeit dafür wäre die „shrinkage“-Technik, ein Verfahren der Bayes-Statistik. In diesem Teil der Arbeit wird kurz auf den sogenannten James/Stein-Schätzer für den Mittelwert und den Bayes/Stein-Schätzer von Jorion eingegangen, welche die Unsicherheit bereits in den Inputschätzungen berücksichtigen.¹⁷⁰

Da das grundlegende Problem bekanntlich bei den Schätzungen der erwarteten Renditen liegt, empfehlen James/Stein anstelle des geschätzten Stichprobenmittelwertes, auf einen Schrumpfschätzer („shrinkage“-Schätzer) zurückzugreifen.¹⁷¹ Beim Stichprobenmittelwert wird die erwartete Rendite eines Wertpapiers nur aus der Historie dieses einen Werts geschätzt. Die möglichen Informationen, die in den Renditerealisationen der anderen Wertpapiere enthalten sind, werden ignoriert.¹⁷² Den „shrinkage“-Schätzer erhält man im Grunde dadurch, dass man alle beobachteten Stichprobenmittelwerte von jedem einzelnen Wertpapier gegen einen gemeinsamen Wert, dem „global mean“ or „grand mean“¹⁷³, zusammenlaufen lässt („shrinking“).¹⁷⁴ Erst aus diesen Werten werden dann die zukünftigen erwarteten Renditen prognostiziert. Durch die einheitliche Verzerrung der Renditen wird das Schätzrisiko im Gegensatz zum herkömmlichen Stichprobenmittelwert deutlich reduziert¹⁷⁵ und ein bedeutend besseres Ergebnis erzielt als bei der traditionellen Mittelwert-Varianz-Optimierung. Als „grand mean“ kann der Mittelwert des Minimumvarianzportfolios (Stein-Schätzer) oder der Durchschnitt aus allen historischen Wertpapierrenditen (James/Stein-Schätzer) verwendet werden.¹⁷⁶

Ein Schrumpf-Schätzer besteht typischerweise aus folgenden drei Komponenten:

- einem Schätzer (wie dem Stichprobenmittelwert),
- einem Schrumpf-Ziel,
- und der Schrumpf-Intensität oder Schrumpf-Faktor („shrinkage intensity“).

Bei der Wahl des Schrumpf-Ziels sollte darauf geachtet werden, dass es sich um ein robustes Ziel handelt, welches nur durch eine geringe Anzahl von Parametern beeinflusst wird. Das Schrumpf-Ziel sollte desweiteren auch die gleichen grundlegenden Eigenschaften wie die unbekannt geschätzten Größen aufweisen. Die Schrumpf-Intensität kann auf Basis von theoretischen Eigenschaften oder einfach durch zahlenmäßige Simulation festgelegt werden.¹⁷⁷

¹⁷⁰ Vgl. U.Herold/R. Maurer (2002), S. 334f.

¹⁷¹ Vgl. Ph. Jorion (1985), S. 260.

¹⁷² Vgl. H. Staehle (2005), S. 52.

¹⁷³ Vgl. J.D. Jobson/B. Korkie (1981), S. 73.

¹⁷⁴ Vgl. R.O.Michaud (1989), S. 37.

¹⁷⁵ Vgl. Ph. Jorion (1985), S. 260.

¹⁷⁶ Vgl. R.O.Michaud (1989), S. 37.

¹⁷⁷ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 275f.

Bei der Messung des Schätzfehlers zieht man den verlorenen Nutzen heran, der aufgrund der Verwendung von Zeitreihenschätzer entsteht. Ziel ist es, die Auswirkungen des Schätzrisikos auf die optimalen Portfolios, den verlorenen Nutzen, zu minimieren.¹⁷⁸ Geht man davon aus, dass die Mittelwerte aus der Stichprobe unabhängig und normalverteilt sind und die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ bekannt ist, dann ist folgende Gleichung zu minimieren:

$$L(\mu, \hat{\mu}) = (\mu - \hat{\mu})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - \hat{\mu})$$

Die allgemeine Formel für den Stein-Schätzer lautet wie folgt:

$$\hat{\mu}_{JS} = (1 - w) \cdot \hat{\mu} + w \cdot \mu_0 \cdot I$$

Dabei bezeichnet der Vektor $\mu_0 \cdot I$ das Schrumpf-Ziel und die Gewichte w die Schrumpf-Intensität.¹⁷⁹

5.1 James/Stein-Schätzer

Die Durchschnittswerte der einzelnen Wertpapiere werden mit y_i bezeichnet. Den „grand mean“ \bar{y} errechnet man als arithmetischen Durchschnittswert der Mittelwerte aller Wertpapiere. Bei der Steins Methode lässt man alle individuellen Mittelwerte in Richtung des „grand mean“ zusammenlaufen („shrinking“). Liegt der Mittelwert eines einzelnen Wertpapiers über jenem des „grand mean“, dann muss dieser vermindert werden. Liegt der Mittelwert eines einzelnen Wertpapiers hingegen unter dem „grand mean“, dann muss dieser erhöht werden. Die adaptierten Werte stellen nun die James/Stein-Schätzer für jedes Wertpapier dar und werden durch z_i symbolisiert. Der James/Stein-Schätzer für jedes einzelne Wertpapier lässt sich durch folgende Gleichung errechnen:

$$z_i = \bar{y} + c \cdot (y_i - \bar{y})$$

c stellt dabei den Schrumpf-Faktor („shrinking factor“) dar, welcher immer einen geringeren Wert als 1 annimmt. Der Ausdruck $(y_i - \bar{y})$ gibt die Differenz zwischen dem Mittelwert des einzelnen Wertpapiers und dem „grand mean“ an. Durch den folgenden Ausdruck lässt sich der Schrumpf-Faktor direkt aus den beobachteten Durchschnittswerten ermitteln:

$$c = 1 - \frac{(k - 3) \cdot \sigma^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

¹⁷⁸ Vgl. Ph. Jorion (1986), S. 280.

¹⁷⁹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S.275.

Dabei gibt k die Anzahl der unbekanntenen Mittelwerte an, σ^2 bezeichnet die Varianz und der Ausdruck $\sum(y_i - \bar{y})^2$ gibt die Summe der quadrierten Abweichungen der individuellen Mittelwerte y_i zum „grand mean“ \bar{y} an. Sind die Größen k und σ^2 fix gegeben, dann lässt sich erkennen, dass der Schrumpf-Faktor c geringer wird, wenn der Ausdruck $\sum(y_i - \bar{y})^2$ kleiner wird, da die prognostizierten Renditen stärker vom Schrumpf-Faktor beeinflusst werden.¹⁸⁰ Vorsicht ist jedoch geboten, wenn der Schrumpf-Faktor c einen negativen Wert annimmt. Die beobachteten Mittelwerte würden sich dann nicht zum „grand mean“ hin, sondern von diesem weg bewegen und genau den gegensätzlichen Effekt erzielen. In diesem Fall empfiehlt es sich den Faktor c durch den Wert 0 zu ersetzen.¹⁸¹

5.2 Bayes/Stein-Schätzer nach Jorion

Unter der Annahme, dass Schätzfehler nur bei den erwarteten Renditen, nicht jedoch bei den Varianzen und Kovarianzen berücksichtigt werden, existiert entlang der Effizienzlinie genau nur ein Portfolio, welches völlig frei von Schätzfehlern ermittelt werden kann, und zwar das Minimumvarianzportfolio. Je weiter man sich entlang der Effizienzkurve nach rechts oben bewegt, desto stärker wirken sich Schätzfehler auf die Portfoliozusammensetzung aus. Auf Basis dieser Tatsache wird nun versucht die Struktur eines Portfolios an das Minimumvarianzportfolio anzunähern und zwar, indem man die erwarteten Renditen in Richtung der Rendite des Minimumvarianzportfolios schrumpft.¹⁸² Die Renditen werden deshalb gegen die Rendite des Minimumvarianzportfolios angepasst, weil die Gewichte des Minimumvarianzportfolios ausschließlich von der geschätzten Kovarianzmatrix, nicht aber vom Vektor der erwarteten geschätzten Renditen, beeinflusst werden. Genau diese Eigenschaft des Minimumvarianzportfolios wird vom Bayes/Stein-Schätzer ausgenutzt um das Schätzrisiko zu mildern und bessere Lösungen zu erhalten.¹⁸³

Das Schrumpf-Ziel besteht darin, die Renditen an das Minimumvarianzportfolio anzupassen. Es ergibt sich durch $\mu_{MVP} \cdot I$, wobei μ_{MVP} die Renditen des Minimumvarianzportfolios darstellen und I einen Vektor aus lauter 1 impliziert. Σ symbolisiert die Varianz-Kovarianz-Matrix der Stichprobenrenditen und $\hat{\mu}$ bezeichnet die Mittelwerte aus der Stichprobe. μ_{MVP} beinhaltet die Renditen des Minimumvarianzportfolios.

$$\mu_{MVP} = \frac{I^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \hat{\mu}}{I^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot I}$$

¹⁸⁰ Vgl. B. Efron/C. Morris (1977), S. 123.

¹⁸¹ Vgl. B. Efron/C. Morris (1977), S. 127.

¹⁸² Vgl. U. Herold/R. Maurer (2002), S. 334.

¹⁸³ Vgl. H. Staehle (2005), S. 52.

Die Schrumpf-Intensität (Schrumpf-Faktor) w ergibt sich dann aus folgender Gleichung:

$$w = \frac{N + 2}{N + 2 + T \cdot (\hat{\mu} - \mu_{MVP} \mathbf{1})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu_{MVP} \cdot \mathbf{1})}$$

T gibt die Anzahl der Beobachtungen (Stichprobenumfang) an und N kennzeichnet die Dimension der Daten.

Verzerrte Schätzer, wie die Schrumpfungs-Schätzer, führen oftmals zu besseren Parameterschätzungen und folglich zu stabileren Portfoliogewichten, da der Stichprobenmittelwert ein geringeres Risiko aufweist.¹⁸⁴

¹⁸⁴ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 275f.

6. Black-Litterman-Modell

Obwohl die bahnbrechenden Arbeiten von Harry M. Markowitz hinsichtlich der „Modernen Portfoliotheorie“ von den Experten größtenteils anerkannt sind und einen festen Bestandteil in der wissenschaftlichen Literatur eingenommen haben¹⁸⁵, kommt sie dennoch äußerst selten, aufgrund ihrer zentralen Schwächen, zur praktischen Anwendung. Black und Litterman nahmen sich dieser Schwächen an und entwickelten Anfang der 1990er Jahre das Black-Litterman-Modell, welches heute bei vielen institutionellen Anlegern einen festen Platz in der Portfoliosteuerung einnimmt. Die große Beliebtheit des Modells lässt sich darauf zurückführen, dass es die zwei folgenden zentralen Schwächen der klassischen Portfoliotheorie von Harry Markowitz überwindet:¹⁸⁶

Zum einen müssen nach der klassischen Portfoliotheorie von Harry Markowitz für alle verfügbaren Investments die entscheidenden Inputparameter (die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen) zuverlässig geschätzt werden¹⁸⁷, um anschließend aus diesen prognostizierten Daten das optimale Portfolio, entsprechend der individuellen Präferenzen des Investors, auszuwählen. Da sich die Portfoliomanager in der Realität aufgrund der zahlreich verfügbaren Wertpapiere nur auf ein begrenztes Anlagesegment konzentrieren können, sind Sie auch nicht in der Lage für jedes Anlagesegment zuverlässige Rendite- und Risikoprognosen abzugeben.¹⁸⁸ Anleger greifen deshalb für ihre Schätzungen häufig auf vereinfachende Annahmen zurück und schätzen die erwarteten Renditen auf Basis von historischen Renditerealisierungen.¹⁸⁹

Zum anderen wählt der Investor nach der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung jenes Portfolio als optimal aus, welches seinen Nutzen entsprechend seine subjektiven Präferenzen optimiert. Ob die daraus resultierenden Portfolios ökonomisch plausibel sind, wird bei der Optimierung von Markowitz nicht hinterfragt.¹⁹⁰ Das Modell führt daher leider oftmals zu instabilen und unplausiblen Lösungen. Häufig kommt es zu extremen Gewichtungen in nur wenigen Einzelwertpapiere („corner solutions“)¹⁹¹, die dem Verhalten eines normalen Investors oftmals widersprechen. Zudem reagieren die errechneten optimalen Portfoliogewichte extrem sensibel auf Veränderungen der Inputdaten.

Die zwei oben beschriebenen Gründe haben Black und Litterman dazu bewogen ein eigenständiges Verfahren zu entwickeln, welches robustere und plausiblere Portfoliogewichte generiert, die dem normalen Anlageverhalten von Investoren besser entsprechen.¹⁹²

¹⁸⁵ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 2.

¹⁸⁶ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 727.

¹⁸⁷ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 285.

¹⁸⁸ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 2f.

¹⁸⁹ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 28.

¹⁹⁰ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 2f.

¹⁹¹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 727.

¹⁹² Vgl. W. Drobetz (2002), S. 3.

Das Black-Litterman-Modell kombiniert die marktgewichteten Renditeerwartungen des Marktes (Referenzrenditen) mit den eigenen, subjektiven Erwartungen der Investoren und berechnet daraus die revidierten Renditeerwartungen, welche als Inputgrößen in die Markowitz-Optimierung einfließen.¹⁹³ Der Aufbau des Black-Litterman Ansatzes ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

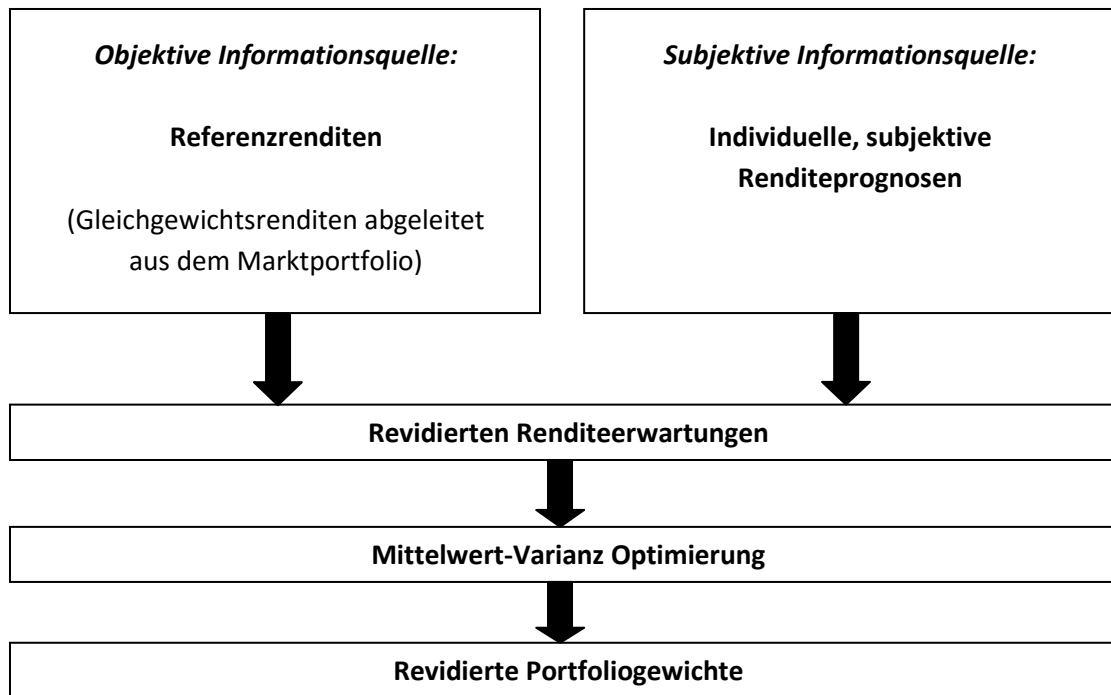


Abbildung 7: Grundidee des Black-Litterman-Ansatzes¹⁹⁴

Beide Informationsquellen sind mit Unsicherheit behaftet und lassen sich durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ausdrücken. Um die beiden Informationen miteinander zu verknüpfen, greifen Black und Litterman auf die „Bayesianische Statistik“ zurück. Sie kombiniert die objektiven Informationen des Marktes mit den subjektiven Prognosen des Investors und generiert eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die künftigen Renditeerwartungen.¹⁹⁵

Ausgangspunkt für die Bayesianische Statistik ist die als subjektiv bekannt vorausgesetzte a-priori Verteilung einer Zufallsvariable. Sind neue Informationen verfügbar, dann kann mit Hilfe des Satzes von Bayes eine revidierte bzw. bedingte Verteilung der Zufallsvariable bestimmt werden. Man nennt diese Verteilung auch a-posteriori Verteilung. Dieses Verfahren kennt man in der Statistik häufig auch als „Lernen durch Erfahrung“.¹⁹⁶

¹⁹³ Vgl. F. Feilke/M. Gürtler (2008), S. 5.

¹⁹⁴ Vgl. In Anlehnung an Drobetz (2002), S. 16.

¹⁹⁵ Vgl. R. Jones et al. (2007), S. 24.

¹⁹⁶ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 21f.

6.1 Neutraler Referenzpunkt – Gleichgewichtsrenditen

Als neutralen Ausgangspunkt für den Optimierungsprozess empfehlen Black und Litterman die Referenzrenditen als Gleichgewichtsrenditen über das Capital Asset Pricing Modell (CAPM) aus dem Marktportfolio abzuleiten.¹⁹⁷

Black und Litterman haben für das neutrale Referenzportfolio neben den Gleichgewichtsrenditen auch andere naive Ansätze, wie historische Durchschnittsrenditen, gleiche erwartete Renditen für jede Anlageklasse und risikoangepasste Renditen als neutrale Mittelwertansatz oder den risikoangepassten gleichwertigen Mittelwertansatz diskutiert.¹⁹⁸ Diese alternativen Prognosemöglichkeiten führen aber oftmals zu extremen Portfoliokonstruktionen und wurden daher von Black und Litterman als ungeeignet empfunden um ein Referenzportfolio darzustellen.¹⁹⁹ Die Gleichgewichtsrenditen, welche anhand des CAPM bestimmt werden können²⁰⁰, sind daher nach Black und Litterman am besten als Benchmarkrenditen geeignet.²⁰¹

Unter einem Gleichgewicht versteht Litterman jene Situation, in welcher der Kapitalmarkt geräumt ist. Das Angebot entspricht dann gleich der Nachfrage. Litterman ist sich dabei sehrwohl bewusst, dass der Finanzmarkt diese Lage nicht immer einnimmt. Dennoch ist er davon überzeugt, dass die häufig auftretenden Abweichungen vom Marktgleichgewicht, durch die Aktivitäten der Arbitrageure wieder in Richtung Gleichgewicht zurück gedrängt, die fehlerhaften Bewertungen daher korrigiert werden und nicht von Dauer sind.²⁰²

Das Marktportfolio (= Referenzportfolio) spiegelt das „normale“ langfristige Anlageverhalten von Investoren wider und stellt folglich die Benchmark dar. Ausgehend davon können die Renditen entsprechend der subjektiven Markteinschätzungen angepasst werden.²⁰³ Das Marktportfolio ist definiert als das bestmöglich diversifizierte Portfolio in der „Modernen Portfoliotheorie“ und umfasst alle am Markt verfügbaren risikobehafteten Wertpapiere, im Verhältnis ihrer Marktkapitalisierung.²⁰⁴

Kennt man die aktuelle Marktkapitalisierung, dann lassen sich mittels Umkehroptimierung („reverse optimization“) die erwarteten Renditen des Marktportfolios ermitteln.²⁰⁵

Black und Litterman verwenden für ihren Ansatz die Gleichgewichtsüberrenditen aus dem Capital Asset Pricing Modell.²⁰⁶ Nach dem CAPM setzt sich die erwartete Rendite eines

¹⁹⁷ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 12.

¹⁹⁸ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 30.

¹⁹⁹ Vgl. Th. Idzorek (2005), S. 3.

²⁰⁰ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 728.

²⁰¹ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 12.

²⁰² Vgl. Ch. Mankert (2006), S. 26.

²⁰³ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 12.

²⁰⁴ Vgl. L. Perridon/M. Steiner (2007), S. 251.

²⁰⁵ Vgl. Fr. Feilke/M. Gürtler (2008), S. 6.

²⁰⁶ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 12.

Wertpapiere $E(r_i)$ aus einem risikolosen Zinssatz r_f und einer Risikoprämie $\beta_i E(r_M - r_f)$ zusammen, welche den Investor für das eingegangene systematische Risiko entlohnt.

$$E(r_i) = r_f + \beta_i E(r_M - r_f) + u_i$$

Der Ausdruck $(r_M - r_f)$ gibt an, um wie viel die erwartete Rendite des Marktes über dem risikolosen Zinssatz liegt, und β_i drückt die Sensitivität des individuellen Wertpapiers gegenüber den Veränderungen der Überrendite des Marktes aus. Da die erwarteten Renditen unsicher sind, symbolisiert der Term u_i eine normalverteilte Zufallsvariable mit einem Mittelwert von 0. Aus Vereinfachungsgründen wird nachfolgend der gesamte Vektor der erwarteten Risikoprämien mit dem Symbol Π dargestellt.²⁰⁷

Nach der klassischen Portfoliotheorie von Markowitz und unter Annahme einer quadratischen Nutzenfunktion, ergibt sich das optimale Portfolio durch Maximierung der Mittelwert-Varianz-Bewertungsfunktion (= Präferenzfunktion):

$$U = w^T \Pi - \left(\frac{\delta}{2}\right) w^T \Sigma w \longrightarrow \max_w!$$

U = Nutzenfunktion des Investors während der Portfoliooptimierung (= quadratische Nutzenfunktion)

w = Vektor mit den Portfoliogewichten des Marktes

Π = Vektor mit den erwarteten Renditen

δ = Koeffizient der relativen Risikoaversion = Risikoaversionsparameter des Marktes

Σ = Varianz-Kovarianz-Matrix des Marktes

Der Ausdruck $w^T \Pi$ stellt in der Funktion die Portfoliorendite μ_{PF} dar und der Term $w^T \Sigma w$ steht für die Portfoliovarianz σ_{PF}^2 . Der Risikoaversionsparameter bzw. Risikoaversionskoeffizient δ lässt sich als erwartetes Rendite-Risiko-Verhältnis interpretieren und dient in der Umkehroptimierung als Skalierungsfaktor.²⁰⁸ Legt man das CAPM zugrunde, dann entspricht dieser Risikoaversionsparameter genau dem Marktpreis des Risikos (= „Sharpe Ratio“).²⁰⁹ Er gibt an, auf wie viele Einheiten von der erwarteten Rendite ein Investor zu verzichten bereit ist, um eine Einheit weniger Risiko zu haben.²¹⁰

Für die Gleichgewichtsrenditen ist die erste Ableitung nach den Gewichten zu bilden, 0 zu setzen und nach Π aufzulösen.

²⁰⁷ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 728.

²⁰⁸ Vgl. Th. Idzorek (2005), S. 3.

²⁰⁹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 729.

²¹⁰ Vgl. Th. Idzorek (2005), S. 3f.

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0$$

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

Sind die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ , der Risikoaversionsparameter δ und die aktuelle Marktkapitalisierung w bekannt, können die erwarteten Gleichgewichtsüberrenditen Π einfach durch einsetzen berechnet werden.

Formt man die obige Gleichung nach dem Gewichtungsvektor w um, dann erhält man die optimale Portfoliostruktur ohne Berücksichtigung von Restriktionen.

$$w^* = (\delta \Sigma)^{-1} \Pi^{211}$$

w^* stellt den Vektor mit den optimalen Gewichten für das Portfolioproblem dar. Bei der Umkehroptimierung im Black-Litterman-Verfahren ist die Vorgehensweise genau umgekehrt. Der Vektor mit den Portfoliogewichten ist gegeben und gesucht wird nach den Portfoliorenditen. Hierfür ist die obige Gleichung nach den Portfoliorenditen aufzulösen und man erhält als Ergebnis die Gleichgewichtsrenditen bzw. Referenzrenditen Π^* .

$$\Pi^* = \Sigma w \delta$$

Die über die Umkehroptimierung ermittelten Renditen dienen als Referenzrenditen, von denen Investoren, entsprechend ihrer persönlichen Markteinschätzungen, abweichen können.²¹²

6.2 Verteilung der Referenzrenditen

Unter der Annahme von normalverteilten Renditeerwartungen kann die priori (= erfahrungsunabhängige) Verteilung der Gleichgewichtsrenditeerwartungen wie folgt beschrieben werden:

$$E(R) \sim N(\Pi, \tau \Sigma)$$

N = Normalverteilungsfunktion

Π = Vektor der erwarteten Gleichgewichtsüberrenditen (= Referenzrenditen)

τ = Proportionalitätsfaktor

Σ = Varianz-Kovarianz-Matrix (geschätzt auf Basis historischer Daten)

²¹¹ Vgl. J. Walters (2014), S. 5f.

²¹² Vgl. W. Drobetz (2002), S. 13f.

Vereinfachend haben Black und Litterman angenommen, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix der erwarteten, geschätzten Renditen proportional zur historischen Varianz-Kovarianz-Matrix Σ ist. Dafür kreierten sie einen Proportionalitätsfaktor τ , der genau diesen proportionalen Zusammenhang zwischen den beiden Varianz-Kovarianz-Matrizen darstellt. Der Faktor gibt an, welches Vertrauen der Investor in seine eigenen Referenzrenditen hat. Ein niedriger Wert von τ impliziert ein großes Vertrauen des Investors in seine berechneten Gleichgewichtsüberrenditen. Setzt man voraus, dass das Referenzportfolio plausibel gewählt wurde, sollte der Proportionalitätsfaktor entsprechend klein sein.²¹³ Black und Litterman empfehlen für den Proportionalitätsfaktor τ einen kleinen Wert nahe 0 zu wählen, da die Varianz bzw. die Unsicherheit der Renditen wesentlich größer ist, als die Varianz bzw. die Unsicherheit der erwarteten Renditen.²¹⁴

6.3 Subjektive Ansichten der Investoren

Die Gleichgewichtsrenditen können als langfristige Renditen interpretiert werden, die sämtliche Informationen enthalten, die am Kapitalmarkt verfügbar sind.²¹⁵ Haben Investoren zusätzliche Informationen hinsichtlich der erwarteten Gleichgewichtsrenditen²¹⁶ oder verfügt ein Investor über zusätzliche subjektive Sichtweisen hinsichtlich der erwarteten Renditen, so kann er diese subjektiven Einschätzungen mit in den Optimierungsprozess einfließen lassen.²¹⁷ Für die praktische Umsetzung des Black-Litterman-Modells müssen die Investoren einerseits die einzelnen Renditeprognosen (Richtung und Höhe der subjektiven Renditen) und andererseits auch die Güte dieser individuellen Prognosen quantifizieren.

Geht man von annähernd normalverteilten Renditen aus, dann lässt sich diese Prognosegüte am einfachsten durch ein Konfidenzintervall um die erwarteten Renditen beschreiben. Ist sich der Investor hinsichtlich seiner subjektiven Renditeprognosen recht sicher, dann schlägt sich dies in einem kleinen Konfidenzintervall nieder. Verfügt er hingegen über eine geringe Prognosesicherheit, fällt das Konfidenzintervall wesentlich größer aus, und die Abweichungen der revidierten Portfoliogewichte vom Referenzportfolio fallen geringer als bei hoher Prognosesicherheit aus.²¹⁸

Black und Litterman halten fest, dass Investoren grundsätzlich nicht für das gesamte Anlageuniversum über eigene Markteinschätzungen (individuelle Renditeprognosen) verfügen. Es müssen daher auch nicht für alle Anlagekategorien subjektive Renditeprognosen abgegeben werden. Vielmehr ermöglicht der Ansatz dem Investor, für ausgewählte Anlageklassen individuelle Renditeprognosen zu quantifizieren.²¹⁹ Hat ein Investor keine subjektiven Ein-

²¹³ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 17.

²¹⁴ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 34.

²¹⁵ Vgl. K. Winkelmann/A. Bevan (1998), S. 2.

²¹⁶ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 34.

²¹⁷ Vgl. F. Feilke/M. Gürtler (2008), S. 6.

²¹⁸ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 16.

²¹⁹ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 30.

schätzungen hinsichtlich der erwarteten Renditen, dann sollte er auch keine Prognosen bezüglich der Marktrenditen abgeben und stattdessen das Marktportfolio halten.²²⁰ Hat er jedoch subjektive Ansichten hinsichtlich der erwarteten Renditen, dann kann er diese sowohl in relativen als auch in absoluten Abweichungen vom Referenzportfolio, in Form von unterschiedlichen Linearkombinationen der verschiedenen Anlagekategorien, in einem k -dimensionalen Vektor Q formulieren und bei der Optimierung berücksichtigen.

$$Q + \varepsilon = P \cdot E(R)^{221}$$

Der Vektor $E(R)$ beinhaltet die erwarteten Überschussrenditen der einzelnen Wertpapiertitel im Marktportfolio, für die der Investor eigene Einschätzungen formuliert.²²² Der Vektor P ordnet den einzelnen Wertpapieren die subjektiven Ansichten des Investors zu.²²³ Gibt der Investor für ein Wertpapier mehrere Renditeprognosen ab, so stellt P keinen Vektor, sondern eine Matrix dar.²²⁴ Dabei drückt jede Zeile der Matrix P einen Prognosewert für das Wertpapier aus.²²⁵ Der Vektor Q gibt die Höhe und Richtung der Renditeprognosen an. Bei ε handelt es sich um einen Vektor mit Prognosefehlern, der die mit der jeweiligen Prognose verbundenen Schätzfehler darstellt. Die Schätzfehler können als Maß für die Prognosegüte des Investors angesehen werden und sind umso höher, je geringer die Prognose des Investors ist. ε ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit einem Mittelwert von 0 und einer Varianz-Kovarianz-Matrix von Ω .²²⁶ Black und Litterman gehen vereinfachend davon aus, dass die Prognosefehler voneinander unabhängig sind und daher nicht miteinander korrelieren.²²⁷ Aufgrund dieser Annahme wird die Schätzfehlermatrix zu einer Diagonalmatrix. In der Hauptdiagonale finden sich die Elemente des Vektors ε wieder. Alle Werte außerhalb der Diagonale nehmen jeweils den Wert 0 an.²²⁸

Ins Black-Litterman-Modell fließen nicht die Fehlerterme ε selbst, sondern deren Varianzen ϖ über die Schätzfehlermatrix ein.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \varpi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_{kk} \end{bmatrix}^{229}$$

Die Varianzen der Fehlerterme ϖ symbolisieren die Unsicherheit der Ansichten des Investors.²³⁰ Die Zuversicht einer Markteinschätzung ergibt sich somit aus $1/\varpi$ und die Konfi-

²²⁰ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 33.

²²¹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 288.

²²² Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 729.

²²³ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 289.

²²⁴ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 35.

²²⁵ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 289.

²²⁶ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 18.

²²⁷ Vgl. Th. Idzorek (2005), S. 10ff.

²²⁸ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 18.

²²⁹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 729.

²³⁰ Vgl. Th. Idzorek (2005), S. 10ff.

denzmatrix aller Sichtweisen kann durch Ω^{-1} beschrieben werden. Je unsicherer die Prognosen eines Investors, desto größer sind die Varianzen der Fehlerterme ϖ , und umso kleiner sind die Konfidenzen des Anlegers.²³¹

In den Black-Litterman-Ansatz können sowohl relative als auch absolute Renditeprognosen des Investors einfließen. Gibt der Investor eine absolute Prognose ab, die nur eine Anlageklasse betrifft, dann ist die Summe der Gewichte an der Stelle der jeweiligen Anlageklasse gleich 1. Da die anderen Zeilenelemente der Prognosematrix gleich 0 sind, ergibt sich bei einer absoluten Prognose eine Zeilensumme von 1. Bei einer relativen Renditeprognose, von der grundsätzlich zwei oder mehr Anlagekategorien betroffen sind, ist die Gewichtssumme innerhalb dieser Prognose gleich 0.

Der Ansatz ist daher sehr flexibel und erlaubt die Einbeziehung unterschiedlicher Prognosen. Die Investoren müssen neben der Richtung und Höhe der Renditeprognosen auch die Güte der eigenen Prognosefähigkeit quantifizieren. Ändern sich die erwarteten Prognosen für die Renditen, dann ändern sich beim Black-Litterman-Verfahren, im Gegensatz zur klassischen Portfoliotheorie, die Portfoliogewichte nur in jenen Anlageklassen, für welche eine Veränderung vorgenommen wurde. Alle anderen Gewichte bleiben unverändert. Durch diese Eigenschaft können stabilere Portfoliogewichte erreicht werden.²³²

Wird für die subjektiven Renditeerwartungen wieder die Normalverteilung angenommen, ergibt sich die Verteilung der Renditen folgendermaßen:

$$E(R) \sim N(Q, \Omega)^{233}$$

Hat man beide Informationsquellen – die Gleichgewichtsrenditen aus dem CAPM und die subjektiven Renditeprognosen des Investors – so können in einem weiteren Schritt die revidierten Renditen ermittelt werden, welche dann in die Portfoliooptimierung nach Markowitz einfließen.²³⁴

6.4 Revidierte Renditeerwartungen nach Black-Litterman

Für die Berechnung der kombinierten Renditen gibt es zwei gleichwertige Ansätze, die Theils Methode und die Bayesian Methode, welche beide kurz beschrieben werden. Beide Ansätze führen zu ähnlichen Ergebnissen, dennoch empfehlen Black und Litterman die Bayesianische Schätzmethode.²³⁵

²³¹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 729.

²³² Vgl. W. Drobetz (2002), S. 12ff.

²³³ Vgl. Th. Idzorek (2005), S. 10ff.

²³⁴ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 289.

²³⁵ Vgl. J. Walters (2014), S. 9.

In der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung geht man davon aus, dass die wahren erwarteten Renditen und Kovarianzen der Renditen unbekannt und fix sind. Die künftig erwarteten Renditen werden mit Hilfe von Prognosemodellen anhand historischer Marktdaten und eigenen Informationen geschätzt. Eine solche Schätzung ist allerdings sehr ungenau und daher wird die Optimierung von den Schätzfehlern der Prognosen wesentlich beeinflusst.

Der Bayesianische Ansatz geht im Gegensatz zur klassischen Portfoliooptimierung davon aus, dass die wahren erwarteten Renditen unbekannt und zufällig sind. Der Ansatz verwendet eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche die subjektive Überzeugung eines Investors, dass ein bestimmtes Ereignis tatsächlich eintreten wird (= prior distribution), berücksichtigt. Die Ansicht eines Investors und daher auch seine Wahrscheinlichkeitsverteilung verändern sich, sobald der Investor über weitere Informationen (Datenbeobachtungen) verfügt. Mit Hilfe der Bayesianischen Schätzmethode kann dann eine neue Wahrscheinlichkeitsfunktion (= posterior distribution) errechnet werden.²³⁶ Der Bayesianische Ansatz bestimmt die bedingte Wahrscheinlichkeit $\phi(E(R)|\pi)$ und errechnet die Prognosen des Investors nach Aktualisierung neuer Informationen.²³⁷

$$\phi(E(R)|\pi) = \frac{\phi(\pi|E(R))\phi(E(R))}{\phi(\pi)}$$

Der Ausdruck $\phi(E(R))$ gibt die marginale Wahrscheinlichkeitsverteilung der erwarteten Überrenditen an und integriert die Ansichten des Investors (= prior distribution). $\phi(\pi)$ beschreibt die marginale Wahrscheinlichkeitsverteilung der Überrenditen, abgeleitet aus einem Gleichgewichtsmodell wie dem CAPM. Der Term $\phi(\pi|E(R))$ stellt in der obigen Formel die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung dar und beschreibt die Gleichgewichtsrenditen unter Berücksichtigung der Prognosen des Investors (= conditional distribution).²³⁸

Ein grundlegendes Problem bei der Anwendung der Bayesianischen Theorie besteht in der Bestimmung der mathematischen, marginalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Ansichten der Investoren. Black und Litterman treffen in ihrem Modell drei wesentliche Annahmen. Erstens gehen sie von normalverteilten Inputdaten (Wertpapierrenditen) aus, was zur Folge hat, dass auch die bedingten marginalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (posterior distribution) normalverteilt sind. Eine weitere entscheidende Annahme besteht darin, dass sie davon ausgehen, dass die Varianzen für die marginalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Investorenansichten (prior distribution) und für die bedingten marginalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (conditional distribution) für den wahren Mittelwert bekannt sind, der wahre Mittelwert aber den Investoren unbekannt ist.²³⁹ Drittens gehen Black und Litterman davon aus, dass die Kovarianzen der geschätzten Renditen proportional zu den Kovarianzen der

²³⁶ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 281ff.

²³⁷ Vgl. St. Satchell/A. Scowcroft (2000), S. 41.

²³⁸ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 727.

²³⁹ Vgl. J. Walters (2014), S. 12.

tatsächlichen Renditen verlaufen und durch den Proportionalitätsfaktor τ dargestellt werden.²⁴⁰

Mit Hilfe der Bayesianischen Statistik lassen sich die bedingten Renditeerwartungen $\hat{\mu}_{BL}$ (posterior distribution) für das Black-Litterman-Modell mit folgender Formel darstellen:

$$(E(R)|\pi) = \hat{\mu}_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q \right]^{241}$$

Der erste Teil der Gleichung $\left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1}$ fungiert als Nenner und normiert die revidierten Renditeerwartungen.²⁴² Im Zähler $\left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q \right]$ vermischt das Modell die individuellen Renditeerwartungen des Investors Q mit den Renditeerwartungen des Marktes Π unter Berücksichtigung der historischen Varianz-Kovarianz-Matrix und der Prognosegüte.²⁴³ Über den Proportionalitätsfaktor τ und die Diagonalmatrix der Fehlerterme Ω wird die Gewichtung zwischen den individuellen Renditeprognosen des Investors und den Gleichgewichtsrenditen aus dem Referenzportfolio in der Berechnung berücksichtigt.²⁴⁴ Je höher die Prognosegüte der eigenen Renditeprognosen, desto mehr weichen die revidierten Renditen von den Referenzrenditen ab und bewegen sich in Richtung der eigenen Prognosen.²⁴⁵

Die revidierten Renditeerwartungen μ_{BL} können alternativ auch anhand der folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau \Sigma P^T \left[(P \tau \Sigma P^T) + \Omega \right]^{-1} [Q - P \Pi]$$

In der Gleichung lässt sich deutlich erkennen, dass sich die revidierten Renditeerwartungen aus der Summe der Gleichgewichtsrenditen und den subjektiven Renditeerwartungen ergeben.²⁴⁶

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der revidierten Renditen Σ_{BL} ergibt sich aus der Summe der historischen Varianz-Kovarianz-Matrix Σ und dem Term $\left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1}$, welcher die Unsicherheit der revidierten Renditeerwartungen beschreibt. Ersetzt man diesen Ausdruck durch den Parameter M , ergibt sich die Kovarianzmatrix der Überrenditen des Black-Litterman-Modells, aus der historischen Kovarianzmatrix Σ und aus der Unsicherheit der Dichtefunktion der revidierten Renditen M .²⁴⁷

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1} = \Sigma + M \qquad M = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1}$$

²⁴⁰ Vgl. R. Black/R. Litterman (1992), S. 34.

²⁴¹ Vgl. F. Feilke/M. Gürtler (2008), S. 9.

²⁴² Vgl. M. Lamberti (2007), S. 73.

²⁴³ Vgl. R. Jones et al. (2007), S. 25.

²⁴⁴ Vgl. Ch. Mankert (2006), S. 25.

²⁴⁵ Vgl. R. Jones et al. (2007), S. 25.

²⁴⁶ Vgl. Ch. Mankert (2006), S. 40.

²⁴⁷ Vgl. J. Walters (2014), S. 14.

Die nachfolgende Abbildung zeigt zur besseren Veranschaulichung die Herleitung der revidierten Renditeerwartungen im Black-Litterman-Modell.

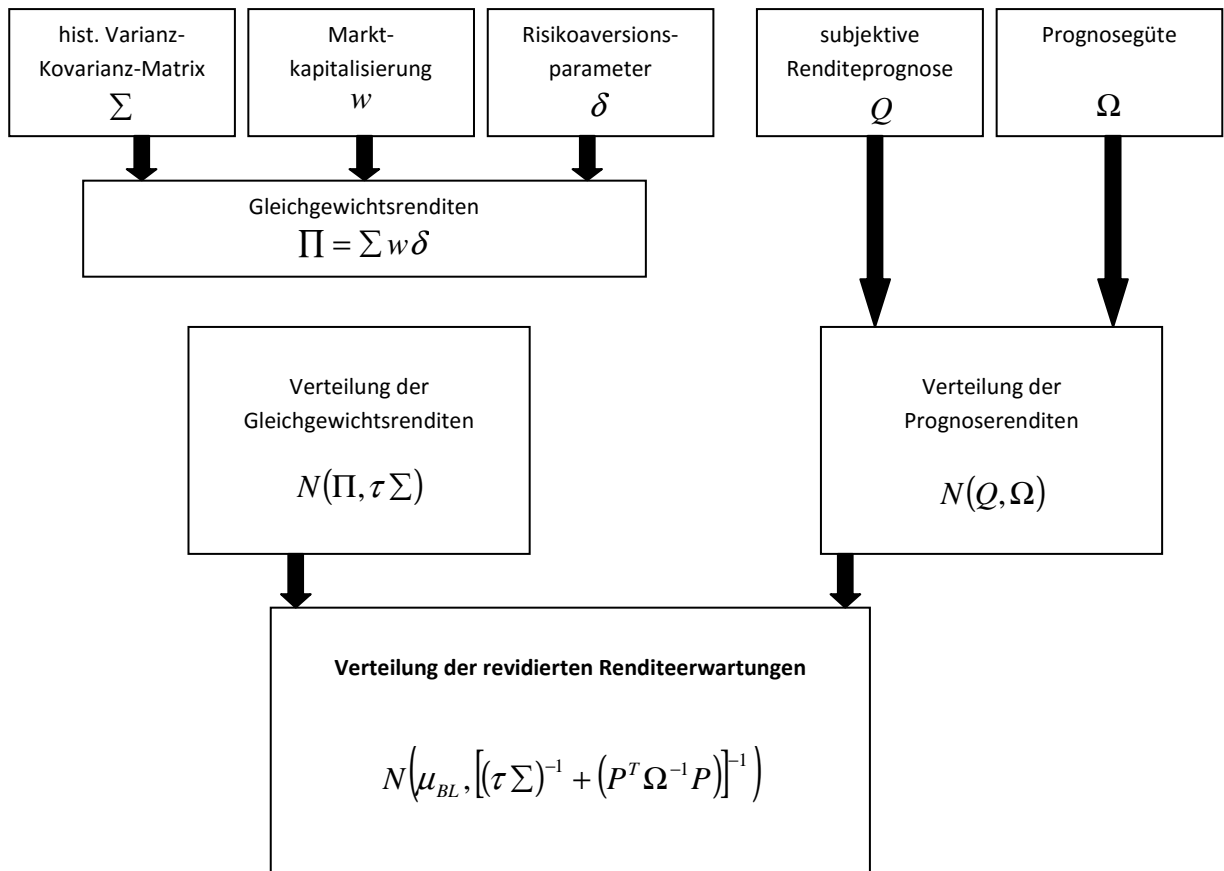


Abbildung 8: Herleitung der revidierten Renditeerwartungen²⁴⁸

Die nach dem Black-Litterman-Modell errechneten revidierten Renditen können nun als Inputdaten für die klassische Mittelwert-Varianz-Optimierung verwendet werden. Die optimalen Black-Litterman-Portfoliogewichte w_{BL}^* , ohne Berücksichtigung von Beschränkungen, ergeben sich aus der folgenden Formel:²⁴⁹

$$w_{BL}^* = (\lambda \Sigma)^{-1} \mu_{BL} \quad ^{250}$$

Das Optimierungsproblem lässt sich alternativ auch durch folgende Formel darstellen:

$$w_{BL}^* = w_M + P^T \lambda$$

²⁴⁸ In Anlehnung an Idzorek (2005), S. 16.

²⁴⁹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 730.

²⁵⁰ Vgl. J. Walters (2014), S. 19.

Dabei repräsentiert der Vektor w_M in der obigen Formel die Portfoliogewichte des Marktes, λ symbolisiert einen Vektor mit den unterschiedlichen Portfoliogewichten der Ansichten des Investors und P^T beinhaltet die speziellen Portfolios der Investoren. Aus der zweiten Formel ist klar ersichtlich, dass sich die Black-Litterman-Portfoliogewichte aus den Gewichten des Marktportfolios und einer gewichteten Summe der individuellen Investorenansichten zusammensetzt. Formt man diese Gleichung folgendermaßen um,

$$w_{BL}^* - w_M = P^T \lambda$$

kann der Term $P^T \lambda$ als ideales Gewicht, relativ zum Marktportfolio, interpretiert werden.²⁵¹

6.5 Sicherheit der Prognose

Bei subjektiven Renditeprognosen spielt auch der Grad der Sicherheit der eigenen Prognosen eine entscheidende Rolle. Je sicherer sich der Investor hinsichtlich einer Prognose ist, desto stärker fließt diese in das Modell mit ein. Black und Litterman unterscheiden in ihrer Arbeit zwischen zwei Spezialfällen: 100% Sicherheit und 0% Sicherheit. In der Realität werden sich die Werte allerdings zwischen diesen beiden Extremfällen bewegen.²⁵²

6.5.1 Prognose unter Sicherheit

Ist sich ein Investor hinsichtlich seiner Prognosen vollkommen sicher, dann wird aus der Varianz-Kovarianz-Matrix der Schätzfehler Ω eine 0-Matrix und aus dem Vektor mit den Schätzfehlern ε ein 0-Vektor. In diesem unrealistischen Spezialfall gehen die subjektiven Renditeerwartungen direkt als revidierte Renditen in die Markowitz-Optimierung ein. Das bedeutet, je sicherer sich ein Investor hinsichtlich seiner subjektiven Renditeprognosen ist, desto stärker werden diese eigenen Prognosen gewichtet und desto mehr weichen die revidierten Renditeerwartungen von den Gleichgewichtsrenditen ab. Die Verteilung der Renditen ergibt sich aus der Lösung des nachfolgenden Optimierungsproblems:

$$(E(R) - \Pi) \Phi^{-1} (E(R) - \Pi)' \rightarrow \min$$

unter der Nebenbedingung $Q = P \cdot E(R)$

Der bedingte Erwartungswert ergibt sich in Folge durch folgende Formel:

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau \Sigma P' [(P \tau \Sigma P') + \Omega]^{-1} [Q - P \Pi]^{253}$$

²⁵¹ Vgl. R. Jones et al. (2007), S. 20ff.

²⁵² F. Black/R. Litterman (1992), S. 30.

²⁵³ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 20ff.

6.5.2 Prognosen unter Unsicherheit

Ein weiterer Spezialfall ist gegeben, wenn die Unsicherheit hinsichtlich der individuellen Ansichten des Investors so hoch ist, dass er dazu geneigt ist, auf die Erwartungen des Marktes zu vertrauen.²⁵⁴ Das bedeutet, hat der Investor ein sehr geringes Vertrauen in seine eigenen Renditeprognosen oder verfügt er über keine individuelle Meinung hinsichtlich der zukünftigen Entwicklung, dann wählt er als optimales Portfolio das Marktportfolio (= Referenzportfolio) und die erwarteten Black-Litterman-Renditen sind gleich den Gleichgewichtsrenditen $\hat{\mu}_{BL} = \Pi$.²⁵⁵

Wird die Unsicherheit über die subjektiven Renditeerwartungen berücksichtigt, dann bleibt der Vektor ε erhalten und die Verteilung der erwarteten Renditen lässt sich mit Hilfe der Bayesischen Statistik bestimmen. Die Renditeerwartungen aus dem Black-Litterman-Modell lassen sich dann anhand der bereits oben angeführten Formel berechnen:

$$\hat{\mu}_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q \right]$$

6.6 Theils Methode

Auch bei Theils Schätzmethode können zusätzliche Informationen in den Inputdaten berücksichtigt werden. Nach Theils lassen sich die subjektiven Einschätzungen der Investoren mit den Gleichgewichtsrenditen wie folgt kombinieren:

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} M + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

Π gibt dabei wieder den Vektor der erwarteten Gleichgewichtsüberrenditen an und Q beinhaltet die subjektiven Ansichten. X enthält die „factor loadings“ für das Modell, U ist der Vektor der Fehlerterme, P die Gewichtungsmatrix und V beinhaltet die Fehler der individuellen Sichtweisen. M symbolisiert schließlich den gesuchten Erwartungswert der bedingten Normalverteilung $\phi(E(R)|\pi)$.²⁵⁶

Bei dieser Methode handelt es sich lediglich um eine gewöhnliche Linearkombination für die erwarteten Renditen M .²⁵⁷ Der Erwartungswert der normalverteilten Fehlerterme nimmt jeweils den Wert 0 an und die erwarteten Varianzen K entsprechen den Residuen.²⁵⁸

²⁵⁴ Vgl. F. Feilke/M. Gürtler (2008), S. 9.

²⁵⁵ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 291.

²⁵⁶ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 729f.

²⁵⁷ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 290.

²⁵⁸ Vgl. J. Walters (2014), S. 10.

$$K\left(\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}\right) = E\left(\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^T & V^T \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tau \Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

Der Term $\tau \Sigma$ bezeichnet die Varianz-Kovarianz-Matrix der erwarteten Überrenditen aus dem Gleichgewichtsmodell, welche um den Erwartungswert Π schwanken. Bei Ω handelt es sich um die Varianz-Kovarianz-Matrix, welche die individuellen Sichtweisen des Investors beinhaltet.

Wendet man für die Schätzung des Erwartungswerts M die Methode der kleinsten Quadrate an, so erhält man den Erwartungswert durch folgende Gleichung:

$$M = \left[\begin{bmatrix} X^T & P^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau \Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X^T & P^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau \Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix}$$

Durch umformen der Gleichung bekommt man wieder die oben dargestellte Black-Litterman-Formel:

$$M = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q \right]^{259}$$

Der Erwartungswert M stellt somit den gewichteten Durchschnitt der Schätzungen dar, wobei die Gewichtungsfaktoren durch die Inverse der geschätzten Kovarianzmatrix Ω^{-1} in die Formel eingehen. Mit Hilfe der Black-Litterman-Formel erhält man die beste lineare, unverzerrte Schätzung für M .²⁶⁰ Die Schätzung ist daher geeignet das Optimierungsproblem, bei gegebenen individuellen Sichtweisen, zu lösen²⁶¹, da die Varianzen der Störgrößen durch diese Formel minimiert werden.²⁶²

$$(E(R) - \Pi) \Phi^{-1} (E(R) - \Pi)' \rightarrow \min$$

$$\text{wenn } Q = P \cdot E(R)^{263}$$

6.7 Schwächen des Black-Litterman-Modells

Trotz der stabileren und ökonomisch plausibleren Lösungen weist auch dieses Modell einige zentrale Schwächen auf, die nicht außer Acht gelassen werden sollten. Wie auch die klassische Mittelwert-Varianz-Optimierung basiert das Black-Litterman-Modell auf der unrealistischen Annahme normalverteilter Renditen. Diese Annahme konnte bereits durch mehrere Studien widerlegt werden. In der Realität kommt es häufig zu extremen Renditerealisationen und die

²⁵⁹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 730.

²⁶⁰ Vgl. J. Walters (2014), S. 10f.

²⁶¹ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S.730.

²⁶² Vgl. J. Walters (2014), S. 10f.

²⁶³ Vgl. F. Black/R. Litterman (1992), S. 35.

Renditeverteilungen unterliegen nur selten einer Normalverteilung.²⁶⁴ Ein weiterer Nachteil des Modells besteht in der Quantifizierung der eigenen Renditeprognosen.²⁶⁵ Zwar muss der Investor im Gegensatz zur klassischen Portfoliooptimierung nicht für alle am Markt existierenden Wertpapiere zukünftige Erwartungen formulieren, dennoch erstreckt sich sein Expertenwissen nur über einzelne Marktsegmente. Er kann daher nur für einzelne Segmente Renditeprognosen abgeben und muss bei jenen Segmenten, in welchen er über kein Fachwissen verfügt, auf das Marktportfolio vertrauen. Investiert ein Investor hauptsächlich in Segmente in denen er über geringes Wissen oder gar kein Wissen verfügt, dann könnte man bereits von vornherein auf die Anwendung des Black-Litterman-Modells verzichten und in das Marktportfolio investieren.²⁶⁶

²⁶⁴ Vgl. Th. Poddig et al. (2009), S. 732.

²⁶⁵ Vgl. W. Drobetz (2002), S. 34.

²⁶⁶ Vgl. F. Feilke/M. Gürtler (2008), S. 10.

7. Berücksichtigung höherer Momente

In der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung wird unterstellt, dass die Wertpapierrenditen normalverteilt und die Nutzenfunktionen der Investoren quadratisch sind. Unter diesen zwei Voraussetzungen kann das optimale Portfolio durch die zwei ersten Momente der Verteilungsfunktion, dem Mittelwert und der Varianz, bestimmt werden.²⁶⁷ Das wichtigste Ziel eines Investors ist es in diesem Fall, die erwartete Rendite für ein bestimmtes Risikolevel zu maximieren.²⁶⁸ Das bedeutet, ein Investor wird jenes Portfolio auswählen, welches bei gleichen erwarteten Renditen ein geringes Risiko bzw. bei gleichem erwarteten Risiko eine höhere Rendite aufweist.²⁶⁹

Allerdings weisen mehrere empirische Studien darauf hin, dass Wertpapierrenditen in der Realität oftmals nicht normalverteilt sind und sogar maßgeblich von der häufig angenommenen Normalverteilung abweichen.²⁷⁰ Die Enden der Renditeverteilungen werden bei der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung völlig außer Acht gelassen – doch haben gerade diese Enden oft einen erheblichen Einfluss auf die Performance eines Portfolios. Empirische Studien zeigen, dass in der heutigen Zeit viele Renditeverteilungen dicke Enden (fat tails)²⁷¹ und eine positive Schiefe aufweisen. Somit sind in Folge die ersten zwei Momente alleine nicht mehr ausreichend, um die Eigenschaften der Renditeverteilung vollständig zu beschreiben.²⁷²

Auch die Annahme, dass die quadratische Nutzenfunktion eine angemessene Annäherung an die tatsächliche Nutzenfunktion des Investors darstellt, erscheint aufgrund einiger Studien äußerst fragwürdig.²⁷³ Die Anwendung von quadratischen Nutzenfunktionen würde nämlich unterstellen, dass Investoren Abweichungen über dem Mittelwert und Abweichungen unterhalb des Mittelwerts gleich bewerten, was impliziert, dass Investoren gelegentlich ein geringes Vermögen einem größerem Vermögen vorziehen würden.²⁷⁴

Da sowohl die Annahme von normalverteilten Renditen als auch die Annahme von quadratischen Nutzenfunktionen in der Realität nicht gegeben sind, sollten auch die höheren Momente der Verteilungsfunktion nicht vernachlässigt und in den Entscheidungsprozess des Investors mit einbezogen werden.²⁷⁵

²⁶⁷ Vgl. F.D. Arditti/H. Levy (1975), S. 797.

²⁶⁸ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 115.

²⁶⁹ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 2.

²⁷⁰ Vgl. P. Chunchachinda et al. (1997), S. 144.

²⁷¹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 131.

²⁷² Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 2.

²⁷³ Vgl. P. Chunchachinda et al. (1997), S. 144.

²⁷⁴ Vgl. J-H. Cremers et al. (2003), S. 1.

²⁷⁵ Vgl. P. Chunchachinda et al. (1997), S. 144.

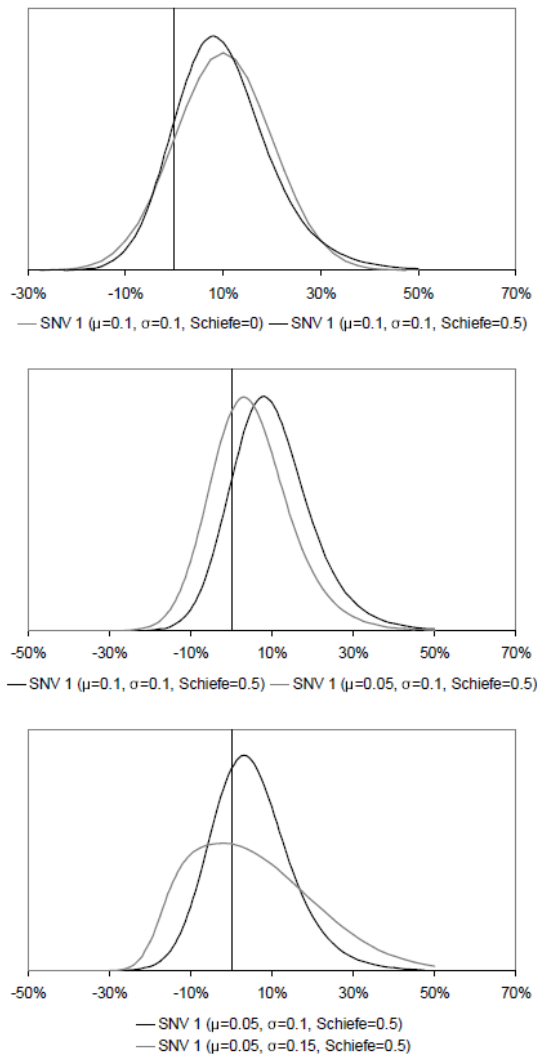


Abbildung 9: Schiefe in der Portfolioselektion²⁷⁶

In der letzten Grafik weichen die Standardabweichungen der beiden Verteilungen voneinander ab und die Erwartungswerte und Schiefen sind gleich. Grundsätzlich würde sich ein Investor für jene Verteilung entscheiden, welche die geringere Varianz aufweist. Doch beide Verteilungen sind schief und folglich kann der Investor auf Basis der klassische Mittelwert-Varianz-Optimierung in diesem Fall keine eindeutige Entscheidung treffen. Die höhere Standardabweichung erhöht einerseits das Verlustpotential aber andererseits auch das Gewinnpotential. Es gilt nun herauszufinden, um wie viel die Schiefe ansteigen muss, damit der Investor für eine höhere Standardabweichung entschädigt wird.

Die nachfolgende Abbildung zeigt noch einmal grafisch, dass eine höhere Schiefe den Investor für eine höhere Standardabweichung oder einen geringeren Erwartungswert entschädigen kann. Die oberen Renditeverteilungen weisen jeweils gleiche Erwartungswerte aber unterschiedliche Varianzen auf. Die Schiefe der beiden Verteilungen ist zunächst noch gleich, sie

Die folgende Abbildung veranschaulicht diese Diskussion grafisch und zeigt die Auswirkungen auf die Portfolioauswahl, wenn das dritte Moment – die Schiefe – in die Optimierung integriert wird.

In der Grafik sind jeweils zwei Verteilungen dargestellt, bei denen jeweils zwei Momente über den gleichen Wert verfügen und nur das dritte Moment unterschiedlich ist.

In der ersten Grafik besitzen die zwei Verteilungen die gleichen Erwartungswerte und Standardabweichungen. Die zwei Verteilungen unterscheiden sich lediglich durch die Schiefe. Die dunklere Verteilung verfügt über eine höhere Schiefe und erscheint für den Investor attraktiver.

In der zweiten Grafik sind die Schiefe und die Standardabweichungen ident, allerdings weisen die zwei Verteilungen unterschiedliche Erwartungswerte auf. Der Investor präferiert die Verteilung mit dem höheren Erwartungswert.

²⁷⁶ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 3.

steigt jedoch mit der höheren Varianz nach rechts hin schrittweise an. In den unteren Verteilungen sind hingegen die Varianzen der Verteilungen identisch und die Erwartungswerte unterscheiden sich voneinander. Die Schiefe wird wieder schrittweise nach rechts hin für die niedrigere erwartete Rendite erhöht. In beiden Darstellungen werden die Verteilungen für einen Investor zunehmend attraktiver.²⁷⁷

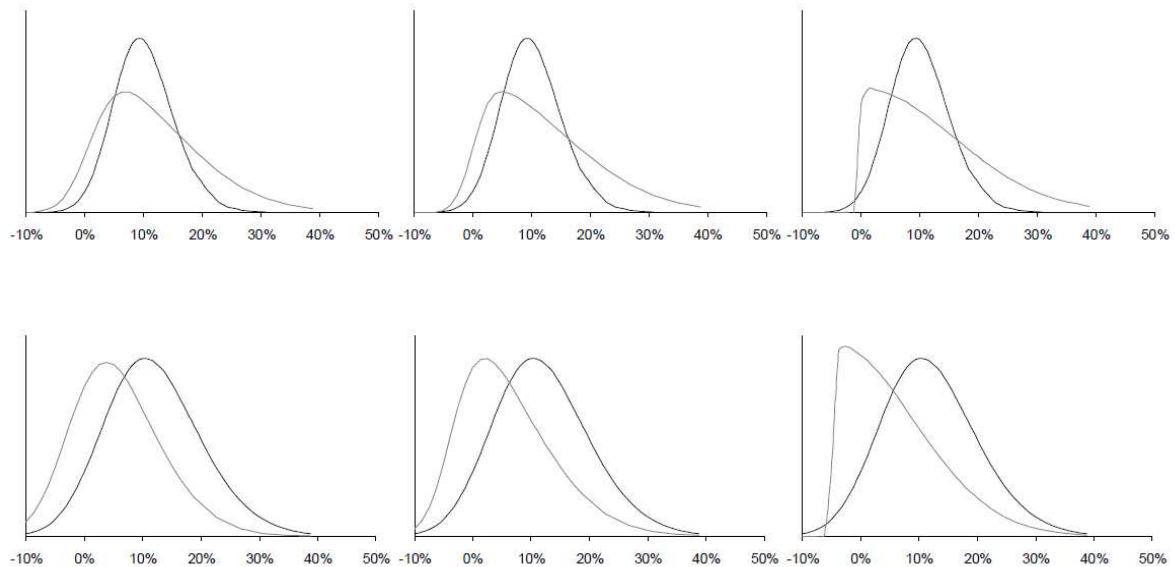


Abbildung 10: Auswirkungen in der Portfolioauswahl, wenn die Schiefe berücksichtigt wird²⁷⁸

Daraus folgt: sind Renditen nicht normalverteilt sondern asymmetrisch bzw. schief, dann sollte zusätzlich auch das dritte Moment mit in den Entscheidungsprozess einbezogen werden.²⁷⁹

Diese Einsicht konnten Scott und Horvath auch analytisch begründen, indem sie zeigten, dass rationale Investoren die ungeraden Momente einer Verteilungsfunktion (Rendite und Schiefe) präferieren, die geraden Momente einer Renditeverteilung (Standardabweichung und Kurtosis) jedoch ablehnen.²⁸⁰

7.1 Schiefe

Die Schiefe ist das dritte Moment einer Verteilung und beschreibt die Symmetrie einer Renditeverteilung. Ist der Wert der statistische Kennzahl 0 oder nahe 0, sind die Renditen normalverteilt. Ist sie hingegen kleiner 0, liegt eine linksschiefe Verteilung vor und negative Wertentwicklungen sind im Vergleich zur Normalverteilung wahrscheinlicher. Bei einer posi-

²⁷⁷ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 2ff.

²⁷⁸ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 5.

²⁷⁹ Vgl. T. Heidorn et al. (2007a), S. 371.

²⁸⁰ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 4f.

tiven Schiefe, ist im Vergleich zu einer Normalverteilung, vermehrt mit positiven Erträgen zu rechnen.²⁸¹

Die empirische Schiefe unter Verwendung von historischen Renditen berechnet sich aus der folgenden Formel:

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^3}{\sigma^3} \quad 282$$

7.2 Wölbung

Die Wölbung (= Kurtosis) misst die Stärke/Steilheit der Krümmung und wird als viertes Moment einer Renditeverteilung definiert. Die Normalverteilung weist eine Wölbung von 3 auf. Sowohl bei einer positiven als auch negativen Wölbung resultiert die Streuung der Verteilung aus seltenen aber extremen Werten.²⁸³

Die empirische Schiefe unter Verwendung von historischen Renditen berechnet sich aus der folgenden Formel:

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^4}{\sigma^4} \quad 284$$

7.3 Taylorreihenerweiterung

Empirische Studien haben gezeigt, dass logarithmische Nutzenfunktionen und Potenz-Nutzenfunktionen relativ unempfindlich gegenüber höheren Momenten sind, folglich ist für Investoren mit solchen Nutzenfunktionen die klassische Mittelwert-Varianz-Entscheidungsregel auch weiterhin gut für die Portfolioauswahl geeignet. Bei un stetigen oder s-förmigen Nutzenfunktionen hingegen, kann die Optimierung nach den ersten zwei Momenten zu maßgeblichen Nachteilen führen, weshalb auch höhere Momente in die Optimierung integriert werden sollten.²⁸⁵

²⁸¹ Vgl. T. Heidorn et al. (2007b), S. 8.

²⁸² Vgl. T. Heidorn et al. (2007b), S. 16.

²⁸³ Vgl. T. Heidorn et al. (2007b), S. 9.

²⁸⁴ Vgl. T. Heidorn et al. (2007b), S. 17.

²⁸⁵ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 134.

Die Präferenzen eines Investors können mit Hilfe von Nutzenfunktionen dargestellt werden²⁸⁶, wobei jeder Investor versuchen wird, seinen erwarteten Nutzen zu maximieren.²⁸⁷

Das Vermögen \bar{V} eines Investors am Ende einer Periode lässt sich durch folgende Gleichung darstellen:

$$\bar{V} = V_0(1 + w'\mu) = V_0(1 + \mu_p)^{288}$$

V_0 bezeichnet dabei das Anfangsvermögen, w' kennzeichnet den Vektor mit den Gewichten und μ bezeichnet den Renditevektor für die Periode. μ_p kann daher als zusätzlicher Vermögenszufluss (= Ertragsrate) interpretiert werden.²⁸⁹

Wenn $U(V)$ nun eine über die Zeit hinweg unveränderte Nutzenfunktion eines Investors hinsichtlich seines Vermögens darstellt, V das unvorhersehbare Vermögen eines Investors angibt²⁹⁰, und man die Nutzenfunktion des Investors um das erwartete Endvermögen $E(V)$ mit Hilfe der Taylorreihe²⁹¹ erweitert, dann erhält man folgenden Ausdruck:

$$E[U(V)] = U[E(V)] + U'[E(V)]E[V - E(V)] + \frac{U''[E(V)]}{2!}E[V - E(V)]^2 + \frac{U'''[E(V)]}{3!}E[V - E(V)]^3 + \dots + \frac{U^{(k)}[E(V)]}{k!}E[V - E(V)]^k + O(V)^k$$

Der erste Term der Gleichung gibt den Erwartungswert (= Durchschnittswert) des Vermögens wieder. Der zweite Term nimmt den Wert 0 an, da $E[V - E(V)]$ gleich 0 ist.²⁹² Der dritte Term drückt die Varianz, der vierte die Schiefe und der fünfte die Wölbung der Zufallsvariable V aus.²⁹³ $O(V)$ kennzeichnet den Restbetrag der Taylorreihenerweiterung.²⁹⁴

Geht man, wie bei der klassischen Portfoliooptimierung, von quadratischen Nutzenfunktionen aus, dann sind die dritte Ableitung und auch alle höheren Ableitungen der Taylorreihenerweiterung gleich 0 und die Erweiterung wäre nutzlos. Auch wenn quadratische Nutzenfunktionen nicht der Realität entsprechen, wird durch deren Verwendung die Lösung mathematisch stark vereinfacht und gerne in der Praxis verwendet.²⁹⁵

²⁸⁶ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 40.

²⁸⁷ Vgl. H. Levy (1969), S. 715.

²⁸⁸ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 134.

²⁸⁹ Vgl. F.D. Arditti/H. Levy (1975), S. 798.

²⁹⁰ Vgl. W.H. Jean (1971), S. 505f.

²⁹¹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 134f.

²⁹² Vgl. W.H. Jean (1971), S. 505f.

²⁹³ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 135.

²⁹⁴ Vgl. E. Jondeau/M. Rockinger (2006), S. 11.

²⁹⁵ Vgl. W.H. Jean (1971), S. 506.

Die ersten vier Momente der Renditeverteilungsfunktion lassen sich somit durch folgende Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned}\mu_p &= E(w'\mu) = E(R_p) & \sigma_p^2 &= E[V - E(V)]^2 = E(R_p - \mu_p)^2 \\ s_p^3 &= E[V - E(V)]^3 = E(R_p - \mu_p)^3 & \kappa_p^4 &= E[V - E(V)]^4 = E(R_p - \mu_p)^4\end{aligned}$$

Ersetzt man in der obigen Nutzenfunktion die Terme durch die soeben dargestellte Schreibweise, so ergibt sich für den Investor die Nutzenfunktion des Vermögens wie folgt:²⁹⁶

$$E[U(V)] = U[E(V)] + \frac{U''[E(V)]}{2!} \sigma_p^2 + \frac{U'''[E(V)]}{3!} s_p^3 + \frac{U''''[E(V)]}{4!} \kappa_p^4$$

Allgemein kann das Optimierungsproblem folgendermaßen dargestellt werden:

$$\max_w w'\mu - \lambda_1 \sigma_p^2 + \lambda_2 s_p^3 - \lambda_3 \kappa_p^4$$

Unter der Bedingung

$$w'I = 1 \rightarrow I' = [1, 1, \dots, 1]$$

Der Ausdruck I gibt einen Vektor an, in welchem nur 1 enthalten sind. Die Parameter λ_1 , λ_2 und λ_3 werden entweder durch die Auswahl der Nutzenfunktion, dem Grad der Risikoaversion oder der individuellen Risikopräferenz, für jedes Moment des Investors bestimmt. Ein rationaler Investor wird daher hohe Werte für die ungeraden Momente bevorzugen, weil extreme Verluste unwahrscheinlicher sind als Verluste. Das hat zur Folge, dass extreme Werte auf der Verlustseite vermindert, aber auf der Gewinnseite erhöht werden. Gleichermäßen präferieren Investoren niedrige Werte für die geraden Momente, da geringe Werte eine schwache Streuung implizieren und die Renditen daher mit weniger Unsicherheit behaftet sind.²⁹⁷

7.4 Polynomial Goal Programming

Damit der Optimierungsvorgang nach Markowitz angewendet werden kann, muss die relevante Verteilungsfunktion der Wertpapierrenditen normalverteilt sein und der Investor über eine quadratische Nutzenfunktion verfügen, sodass die Nutzenfunktion nur mit Hilfe der ersten zwei Momente beschrieben werden kann. Da allerdings in der Realität die Verteilungsfunktion der Wertpapierrenditen meist stärkere/breitere Enden aufweist und asymmetrisch

²⁹⁶ Vgl. E. Jondeau/M. Rockinger (2006), S. 12.

²⁹⁷ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 136f.

verteilt ist²⁹⁸ und auch die Annahme einer quadratischen Nutzenfunktion nicht realistisch erscheint, sollten die höheren Momente der Renditeverteilungsfunktion nicht vernachlässigt, sondern in den Optimierungsprozess mit einbezogen werden.

Damit der Investor den erwarteten Ertrag und die Schiefe maximieren und gleichzeitig das Risiko minimieren kann, ist das mehrdimensionale Optimierungsproblem mit Hilfe des „Polynomial Goal Programming“ (PGP) zu lösen.²⁹⁹ Diese Methode erlaubt eine gleichzeitige Optimierung von mehreren Momenten. Dabei werden die Präferenzen des Investors hinsichtlich der einzelnen Momente als feste Zahl definiert und in Folge adäquate Portfoliogewichte für den Investor ermittelt.³⁰⁰ Durch die zusätzliche Berücksichtigung der Schiefen und Koschiefen kann der Approximationsfehler bei nicht normalverteilten Renditen, welcher durch die klassische zweidimensionale Optimierung entsteht, deutlich verringert werden.³⁰¹ Weitere Vorteile des Polynomial Goal Programming bestehen darin, dass es immer eine optimale Lösung gibt, die Präferenzen des Investors jederzeit abgeändert und angepasst werden können und das für die Berechnungen des optimalen Portfolios nur geringe Anforderungen an den Computer gestellt werden.³⁰²

Lai verwendet für die Portfolioauswahl mit höheren Momenten die üblichen Annahmen, die auch für die klassische Portfoliooptimierung gelten:

1. Die Investoren sind risikoavers und wollen den erwarteten Nutzen ihres Endvermögens maximieren.
2. Das Anlageuniversum besteht aus $n + 1$ Wertpapieren, wobei es sich beim Wertpapier $(n + 1)$ um ein risikoloses Wertpapier handelt und die Soll- und Habenzinssätze genau diesem Zinssatz des risikolosen Wertpapiers entsprechen.
3. Weiters sind alle Wertpapiere handelbar, perfekt teilbar und verfügen über begrenzte Verpflichtungen.
4. Es handelt sich um einen vollkommenen Kapitalmarkt. Transaktionskosten und Steuern werden nicht berücksichtigt.
5. Die eingenommen Erträge können vollständig für Leerverkäufe verwendet werden.
6. Für alle riskanten Wertpapiere existieren Erwartungswerte, Varianzen und höhere Momente. Die Kovarianzmatrix M_2 der Wertpapierrenditen ist positiv definit.³⁰³

Durch die zusätzliche Berücksichtigung der Schiefen und Koschiefen wird die klassische Mittelwert-Varianz-Optimierung lediglich um eine zusätzliche Dimension erweitert.³⁰⁴ Da Investoren positive Werte für die ungeraden Momente bevorzugen und positive Werte für die geraden Momente ablehnen, versuchen Investoren auf der einen Seite die erwartete Rendite und die

²⁹⁸ Vgl. C. R. Harvey et al. (2010), S. 4.

²⁹⁹ Vgl. P. Chunjachinda et al. (1997), S. 144.

³⁰⁰ Vgl. T. Heidorn et al. (2007b), S. 13f.

³⁰¹ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 8.

³⁰² Vgl. P. Chunjachinda et al. (1997), S. 144.

³⁰³ Vgl. T. Lai (1991), S. 295.

³⁰⁴ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 8.

Schiefe zu maximieren und auf der anderen Seite die Standardabweichung und die Kurtosis zu minimieren.³⁰⁵ Um das optimale Portfolio auswählen zu können, ist es daher notwendig einen geeigneten trade-off zwischen den mehreren, sich widersprechenden und konkurrierenden Zielen festzulegen.³⁰⁶

Die Momente von zufälligen Vektoren können mathematisch auch als Tensor dargestellt werden, was für die Portfolioauswahl mit höheren Momenten Sinn macht. Der Schiefe-Tensor besteht aus N^3 Elementen und kann als dreidimensionaler Würfel mit Höhe, Breite und Tiefe gesehen werden. Der Kurtosis-Tensor besteht aus N^4 Elementen, kann visuell als vierdimensionaler Würfel dargestellt werden und lässt sich auch als $N^2 \times N^2$ Matrix bzw. $N \times N^3$ Matrix schreiben.³⁰⁷

Unter Verwendung der Tensor-Schreibweise lassen sich die Momente eines Portfolios folgendermaßen darstellen:

$$r_p = w' \mu = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \mu_i$$

$$\sigma_p^2 = w' M_2 w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}$$

$$s_p = w' M_3 (w \otimes w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot s_{ijk} \quad 308$$

$$\kappa_p = w' M_4 (w \otimes w \otimes w)$$

Alternativ können die Momente des Portfolios auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$r_p = w' \mu$$

$$\sigma_p^2 = E \left[\sum_{i=1}^n w_i (R_i - \mu_i) (r_p - \mu_p) \right] = w' M_2 w$$

$$s_p^3 = E \left[\sum_{i=1}^n w_i (R_i - \mu_i) (r_p - \mu_p)^2 \right] = w' M_3 (w \otimes w)$$

$$s_p^3 = E \left[\sum_{i=1}^n w_i (R_i - \mu_i) (r_p - \mu_p)^2 \right] = w' M_4 (w \otimes w \otimes w) \quad 309$$

³⁰⁵ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 139.

³⁰⁶ Vgl. T. Lai (1991), S. 294.

³⁰⁷ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 137.

³⁰⁸ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 8.

³⁰⁹ Vgl. E. Jondeau/M. Rockinger (2006), S. 14.

\otimes bezeichnet das „Kronecker“-Produkt, welches sich aus dem Produkt zweier, meist großer, Matrizen ergibt. $(w \otimes w)$ ist somit ein $1 \times n^2$ -Vektor, welcher alle möglichen, paarweisen Kombinationen der beiden Faktoren enthält.³¹⁰

μ beschreibt den Vektor mit den erwarteten Renditen, M_2 die Kovarianzmatrix, M_3 die Schiefe-Koschiefen-Matrix und M_4 beinhaltet die Werte für die Wölbungen:³¹¹

$$M_3 = (s_{ijk}) = E[(R - \mu)(R - \mu)' \otimes (R - \mu)']$$

$$M_4 = (\kappa_{ijkl}) = E[(R - \mu)(R - \mu)' \otimes (R - \mu)' \otimes (R - \mu)']$$

Wobei jedes Element durch folgende Formel definiert ist:

$$s_{ijk} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)(R_k - \mu_k)] \quad i, j, k = 1, \dots, N$$

$$\kappa_{ijkl} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)(R_k - \mu_k)(R_l - \mu_l)] \quad i, j, k, l = 1, \dots, N$$

Für einen 3-Wertpapier-Fall ergibt sich für die Schiefe-Koschiefen-Matrix folgende Form:

$$M_3 = \begin{bmatrix} s_{111} & s_{112} & s_{113} & s_{211} & s_{212} & s_{213} & s_{311} & s_{312} & s_{313} \\ s_{121} & s_{122} & s_{123} & s_{221} & s_{222} & s_{223} & s_{321} & s_{322} & s_{323} \\ s_{131} & s_{132} & s_{133} & s_{231} & s_{232} & s_{233} & s_{331} & s_{332} & s_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1jk} & S_{2jk} & S_{3jk} \end{bmatrix}$$

Genau wie die Kovarianzmatrix, sind auch die Tensoren des dritten und vierten Moments symmetrisch – folglich müssen für die Kovarianzmatrix lediglich $n(n+1)/2$ Elemente, für die Koschiefenmatrix $n(n+1)(n+2)/6$ Elemente und für die Kokurtosenmatrix $n(n+1)(n+2)(n+3)/24$ Elemente berechnet werden.³¹² In einem 3-Wertpapier-Fall wären daher für die Kovarianzmatrix 6 Elemente, für die Koschiefenmatrix 10 Elemente und für die Kokurtosenmatrix 15 Elemente zu berechnen.³¹³

Die optimale Lösung erhält man, indem man die Portfoliogewichte w so auswählt, dass die multiple Zielfunktion optimiert wird, was bedeutet, dass auf der einen Seite die Erwartungsrendite und die Schiefe des Portfolios maximiert und auf der anderen Seite gleichzeitig die Varianz und die Wölbung des Portfolios minimiert werden.³¹⁴ Demzufolge können die optimalen Portfoliogewichte errechnet werden, indem man folgendes multiples Optimierungsproblem löst.³¹⁵

³¹⁰ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 8.

³¹¹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 137.

³¹² Vgl. E. Jondeau/M. Rockinger (2006), S. 13.

³¹³ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 138.

³¹⁴ Vgl. P. Chuhachinda et al. (1997), S. 147f.

³¹⁵ Vgl. T. Lai (1991), S. 295.

$$\max_w O_1(w) = r_p = w' \mu$$

$$\min_w O_2(w) = \sigma_p^2 = w' M_2 w$$

$$\max_w O_3(w) = s_p^3 = w' M_3 (w \otimes w)$$

$$\min_w O_4(w) = \kappa_p^4 = w' M_4 (w \otimes w \otimes w)$$

Unter der Bedingung, dass $I'w = 1 \rightarrow I' = [1, 1, \dots, 1]$ ³¹⁶

Unter Verwendung der Tensor-Schreibweise lässt sich das Optimierungsproblem im Allgemeinen durch folgende Form darstellen:

$$\max_w w' r_p - \lambda_1 w' \sum w + \lambda_2 w' M_3 (w \otimes w) - \lambda_3 w' M_4 (w \otimes w \otimes w)$$

Unter der Bedingung, dass $I'w = 1 \rightarrow I' = [1, 1, \dots, 1]$

Bei der Zielfunktion handelt es sich somit, nicht wie bei der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung um eine quadratische Funktion der Portfoliogewichte, sondern um ein Polynom höherer Ordnung, welches auch mehrere lokale Optima aufweisen kann.

Die Grundidee einer multiplen Zielfunktion besteht darin, das Gesamtproblem in mehrere kleine Elemente zu zerlegen und schrittweise jene Lösung zu ermitteln, die möglichst nahe an das gewünschte individuelle Ziel des Investors herankommt. Es gilt herauszufinden, in welche relativen Anteile, man in welches riskante Wertpapier investiert.³¹⁷

Nach Lai können die Portfoliogewichte w in einen neuen Maßstab abgeändert und auf einen Einheitsvarianzraum $\{w | w' \sum w = 1\}$ eingeschränkt werden.³¹⁸

Das multiple Optimierungsproblem lässt sich nun wie folgt darstellen:

$$\max_w O_1(w) = r_p = w' \mu$$

$$\max_w O_3(w) = s_p^3 = w' M_3 (w \otimes w)$$

$$\min_w O_4(w) = \kappa_p^4 = w' M_4 (w \otimes w \otimes w)$$

Unter der Bedingung, dass

$$I'w = 1 \rightarrow I' = [1, 1, \dots, 1]$$

$$w' M_2 w = 1$$

³¹⁶ Vgl. P. Chunchinda et al. (1997), S. 147f.

³¹⁷ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 138f.

³¹⁸ Vgl. T. Lai (1991), S. 295.

Da es im Allgemeinen keine Lösung gibt, die einerseits die Erwartungsrendite $O_1(w)$ und die Schiefe $O_3(w)$ maximiert und gleichzeitig andererseits die Kurtosis $O_4(w)$ minimiert, muss das mehrdimensionale Optimierungsproblem in einem zweistufigen Verfahren gelöst werden.³¹⁹ Es werden daher zuerst unabhängig von den Präferenzen des Investors, nicht dominierte Lösungen erarbeitet, welche erst in einem zweiten Schritt unter Berücksichtigung der Präferenzen des Investors für die Ziele (Grenzrate der Substitution zwischen den Zielen), in das PGP Problem einfließen.³²⁰

Um dieses multiple Optimierungsproblem zu lösen, müssen zuerst die optimalen Werte für die Rendite O_1^* , die Schiefe O_2^* und die Wölbung O_4^* unter Berücksichtigung der Präferenzen des Investors getrennt voneinander berechnet werden. Die Rendite und Schiefe werden maximiert und die Wölbung minimiert.³²¹

Erst in einem zweiten Schritt werden die ermittelten Extremwerte in einer Gleichung miteinander verknüpft. Die konkurrierenden Ziele werden optimiert, indem man die Abweichungen zwischen dem individuellen Ziel und dem optimalen Wert minimiert.³²² Während dieses Prozesses wird für die Varianz der Wert 1 vergeben, was zur Folge hat, dass die erwartete Rendite, im Gegensatz zur Schiefe und Kurtosis, unskaliert in den Optimierungsprozess einfließt.³²³

$$\min_w O(w) = (d_1(w))^{p_1} + (d_3(w))^{p_3} + (d_4(w))^{p_4} \quad 324$$

Unter Berücksichtigung folgender Nebenbedingungen

$$w'(\bar{R} - \bar{r}) + d_1(w) = w'\mu = r_p = O_1^*$$

$$E[w'(\tilde{R} - \bar{R})]^3 + d_3(w) = w'M_3(w \otimes w) = s_p^3 = O_3^*$$

$$E[w'(\tilde{R} - \bar{R})]^4 + d_4(w) = w'M_4(w \otimes w \otimes w) = \kappa_p^4 = O_4^*$$

$$I'w = 1 \rightarrow I' = [1, 1, \dots, 1]$$

$$w'M_2w = 1$$

$$d_1, d_3, d_4 \geq 0$$

³¹⁹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 140.

³²⁰ Vgl. P. Chunchachinda et al. (1997), S. 148f.

³²¹ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 140.

³²² Vgl. T. Heidorn et al. (2007a), S. 376.

³²³ Vgl. R.J. Davies et al. (2009), S. 6.

³²⁴ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 140.

Zuvor müssen die folgenden Kennzahlen für alle Wertpapiere berechnet werden:

$$\bar{R}_j = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_{jt}$$

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (R_{it} - \bar{R}_i)^2$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)$$

$$s_i^3 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (R_{it} - \bar{R}_i)^3$$

$$s_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (R_{it} - \bar{R}_i)^2 (R_{jt} - \bar{R}_j)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)^2$$

Wobei σ_{ij} die Kovarianzen erfasst und s_{ij} bzw. s_{ijj} die Koschiefen, welche zwischen den Verteilungsfunktionen R_i und R_j bestehen, abschätzen.

Beim PGP beinhaltet die Zielfunktion somit keine Auswahlvariablen sondern Abweichungsvariablen, welche sich aus den Abweichungen zwischen den Zielvorstellungen und den optimalen Werten, unter Berücksichtigung der festgelegten Beschränkungen, ergeben. Die Summe dieser Abweichungen gilt es für die optimale Lösung zu minimieren.

Die Ausdrücke O_i^* kennzeichnen die individuellen Extremwerte, wenn die jeweiligen Ziele getrennt voneinander optimiert werden. Bei den Symbolen d_i handelt es sich um nichtnegative Variablen, welche sich aus der Differenz zwischen O_i und O_i^* ergeben. p_i sind nichtnegative Parameter, welche die subjektiven trade-offs (Austauschverhältnisse) zwischen den einzelnen Zielen des Investors darstellen.³²⁵ Je größer die Parameter p_1 , p_3 oder p_4 , desto wichtiger sind die erwartete Rendite, Schiefe oder Kurtosis für den Investor.

Die Parameter p_1 , p_3 oder p_4 sind direkt mit der „Marginalen Grenzrate der Substitution“ (MRS) verbunden. Sie geben an, wie viel ein Investor bereit ist auf ein bestimmtes Ziel zu verzichten, um im Gegenzug dafür ein anderes konkurrierendes Ziel zu erhalten.³²⁶

Die Austauschverhältnisse zwischen erwarteter Rendite und Schiefe und zwischen erwarteter Rendite und Kurtosis lassen sich durch folgende Gleichungen ausdrücken:³²⁷

$$MRS_{r_p, s_p^3} = \frac{\partial O / \partial d_1}{\partial O / \partial d_3} = (p_1 / p_3) [d_1(w)^{p_1-1} / d_3(w)^{p_3-1}]$$

³²⁵ Vgl. P. Chunnachinda et al. (1997), S. 149f.

³²⁶ Vgl. T. Lai (1991), S. 296.

³²⁷ Vgl. R.J. Davies et al. (2009), S.4.

$$MRS_{r_p, \kappa_p^4} = \frac{\partial O / \partial d_1}{\partial O / \partial d_4} = (p_1 / p_4) [d_1(w)^{p_1-1} / d_4(w)^{p_4-1}]^{328}$$

Bei den MRS handelt es sich um die negativen Steigungen der Indifferenzkurven zwischen der erwarteten Rendite und der Schiefe bzw. der erwarteten Rendite und der Kurtosis. Die Indifferenzkurve eines Investors lässt sich somit ermitteln, indem man den trade-off zwischen den konkurrierenden Zielen (die Parameter p_i) in der Zielfunktion verändert. Da die Indifferenzkurve den gesamten Zielraum abdeckt, ist das optimale Portfolio für einen Investor, unter Berücksichtigung der Schiefe, genau jenes, bei welchem die Marginale Grenzrate der Substitution gleich der Steigung der Indifferenzkurve entspricht³²⁹, bzw. die Indifferenzkurve genau die Effizienzkurve tangiert.³³⁰ Da das optimale Portfolio nicht von anderen dominiert wird, ist eine Verbesserung der Zielfunktion nur dann möglich, wenn sich die subjektiven Präferenzen des Investors ändern.³³¹

Investoren mit unterschiedlichen Präferenzen werden daher nicht zwangsläufig das gleiche Portfolio auswählen, und zwar auch dann nicht, wenn die Investoren homogene Erwartungen über die Verteilung der Wertpapierrenditen haben. Folglich sind bei unterschiedlichen Präferenzen auch die Risikoprämien für jeden Investor verschieden.

7.5 Gradientenverfahren

Um das Optimierungsproblem mit höheren Momenten zu lösen, kann auch auf das reduzierte Gradientenverfahren zurückgegriffen werden.³³² Bei diesem Verfahren handelt es sich um die natürliche Erweiterung des Simplexverfahrens auf nichtlineare Optimierungsprobleme. Bei jedem Iterationsschritt werden die aktiven Nebenbedingungen in unabhängige (ungebundene) und abhängige (gebundene) Variablen eingeteilt, um die Zielfunktion schrittweise zu minimieren³³³ – für jede Rendite und Schiefe wird die Varianz minimiert. Mathematisch lässt sich das Optimierungsproblem unter Berücksichtigung der Schiefe folgendermaßen darstellen:

$$\min = \sigma_p^2 = w' M_2 w$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\mu_p = w' \mu$$

$$s_p^3 = w' M_3 (w \otimes w)$$

³²⁸ Vgl. F.J. Fabozzi et al. (2006), S. 141.

³²⁹ Vgl. T. Lai (1991), S. 296.

³³⁰ Vgl. P. Chunchachinda et al. (1997), S. 150.

³³¹ Vgl. T. Lai (1991), S. 296.

³³² Vgl. P. Chunchachinda et al. (1997), S. 150f.

³³³ Vgl. J. Kallrath (2002), S. 91.

Um das Minimierungsproblem zu lösen, wird die Lagrangefunktion aufgestellt:

$$L = w' M_2 w + \lambda_1 (\mu_p - w' \mu) + \lambda_2 (s_p^3 - w' M_3 (w \otimes w))$$

Die ersten Ableitungen für die Anlagengewichte w und die Lagrangemultiplikatoren λ_1 und λ_2 lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2M_2 w - \lambda_1 \mu - 3\lambda_2 M_3 (w \otimes w) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mu_p - w' \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = s_p^3 - w' M_3 (w \otimes w) = 0$$

Bei Gradienten handelt es sich um n -dimensionale Spaltenvektoren, welche sämtliche Ableitungen der Nebenbedingungen nach den n Elementen von w enthalten.

$$G_1 = \mu$$

$$G_2 = 2M_2 w$$

$$G_3 = 3M_3 (w \otimes w)$$

$$G_4 = 4M_4 (w \otimes (w \otimes w))^{334}$$

Diese Schreibweise zeigt eine eindeutige Beziehung zwischen den Momenten des Portfolios und dem Gewichtungsvektor w , was den Vorteil hat, dass lediglich Vektoren mit kleinen Dimensionen benötigt werden.

Mit den aufgestellten Gleichungen lässt sich das Optimierungsproblem numerisch relativ einfach lösen und stellt somit einen geeigneten alternativen Lösungsweg zum PGP Ansatz dar. Die Gewichte werden nicht willkürlich definiert, sondern werden auf Basis der Nutzenfunktion des Investors ausgewählt. Und auch bei einer großen Anzahl von Wertpapieren, lässt sich mit geringem Zeitaufwand eine relativ genaue Lösung errechnen. Ein nicht zu vernachlässigender Schwachpunkt von dieser Optimierungsmethode ist jedoch, dass man sich nur auf eine begrenzte Anzahl von Momenten konzentrieren kann.³³⁵

Welches Portfolio der Investor letztendlich für sich auswählt, ist wie auch bei der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung, von den individuellen Präferenzen des Investors abhängig. Im Gegensatz zur klassischen Portfoliooptimierung ergibt sich die Menge der optimalen Portfolios nicht mehr als Linie der „efficient frontier“, sondern als Ebene im 3-dimensionalen Raum.³³⁶

³³⁴ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 9f.

³³⁵ Vgl. E. Jondeau/M. Rockinger (2006), S. 14.

³³⁶ Vgl. F. Guse/M. Rudolf (2006), S. 10.

7.6 Kornisch-Fischer-Methode – Modifizierter Value at Risk

Beim Value at Risk (VaR) handelt es sich um ein alternatives Risikomaß für die Portfoliooptimierung, welches nur die negativen Abweichungen vom Mittelwert misst („downside risk“).³³⁷ Der VaR ist definiert als der maximal mögliche Verlust, welcher in einem bestimmten Zeitraum mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) nicht überschritten wird.³³⁸ Angesichts der berechtigten Zweifel an einer Normalverteilung von Renditen können durch Integration höherer Momente weitere Informationen gewonnen werden.³³⁹

Folglich gilt, sind Portfoliorenditen nicht normalverteilt, dann ist der Value at Risk kein geeignetes Risikomaß für die Portfoliooptimierung und statt dem VaR sollte der „Modifizierte Value at Risk“ (mVaR) herangezogen werden.³⁴⁰ Dieses Verfahren wird auch als Kornisch-Fischer-Methode bezeichnet und stellt eine Erweiterung des VaR-Ansatzes dar.³⁴¹ Die mVaR-Methode bezieht auch die höheren statistischen Momente, die Schiefe und die Wölbung, mit in ihre Berechnung ein, wodurch sich ein Wert für die Asymmetrie berechnen lässt. Weisen die Renditen eine negative Schiefe auf, oder ist die Verteilung flachgipflig (= platykurtisch), dann schätzt die Kornisch-Fischer-Methode einen größeren Verlust als die klassische VaR-Methode. Haben die Renditen hingegen eine positive Schiefe, oder ist die Verteilung steilgipflig (= leptokurtisch), dann ist der geschätzte Verlust geringer als beim VaR. Unter Annahme normalverteilter Renditen berechnet sich der VaR aus folgender Gleichung:

$$VaR = \mu(X) + \sigma(X)q_p$$

q_p definiert dabei den kritischen Wert für den VaR bei einem Konfidenzintervall von p .

Der mVaR errechnet sich unter Annahme normalverteilter Renditen aus folgender Formel:

$$mVaR = \mu(X) + \sigma(X)z_{cf}$$

$$z_{cf} = q_p + \frac{(q_p^2 - 1) \cdot S(X)}{6} + \frac{(q_p^3 - 3q_p) \cdot K(X)}{24} - \frac{(2q_p^3 - 5q_p) \cdot S^2(X)}{36}$$

Wobei $S(X)$ die Schiefe, $K(X)$ die Wölbung und z_{cf} den kritischen Wert für den mVaR für das Konfidenzintervall von p bezeichnet.

Sind Renditen normalverteilt, dann führen sowohl der VaR als auch der mVaR zum gleichen Ergebnis. Liegt hingegen keine Normalverteilung vor, dann stellt der mVaR ein effizienteres Risikomaß für die Portfoliooptimierung dar und sollte daher dem VaR vorgezogen werden.³⁴²

³³⁷ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 601.

³³⁸ Vgl. Th. Poddig et al. (2008), S. 137.

³³⁹ Vgl. M. Steiner/Ch. Bruns (2002), S. 601.

³⁴⁰ Vgl. A. Özlem/M. Sjöstrand (2011), S. 15.

³⁴¹ Vgl. E. Wüthrich (2010), S. 88.

³⁴² Vgl. A. Özlem/M. Sjöstrand (2011), S. 15ff.

8. Zusammenfassung

Aufbauend auf den Arbeiten von Harry Markowitz haben sich im Laufe der Zeit mehrere alternative Anlagetheorien entwickelt um für einen Investor das optimale Portfolio zu ermitteln. Einige davon sind von Experten und in der wissenschaftlichen Literatur anerkannt und werden auch in der Praxis häufig zur Portfoliooptimierung eingesetzt. Doch auch diese unterschiedlichen systematischen Auswahlprozesse sind kein Garant dafür, dass das Portfolio für einen Investor optimal strukturiert wird. Sie beruhen meist auf stark vereinfachenden Annahmen und können so die Realität nicht geeignet abbilden. Desweiteren werden die Inputparameter, welche in die Modelle einfließen, meist anhand vergangener Renditerealisationen geschätzt.

Nichts desto trotz lässt sich aus der Arbeit von Markowitz eine wichtige Tatsache für die reale Anlagewelt erkennen. Durch Aufteilung des Vermögens in verschiedene Anlageformen kann das Risiko für einen Investor deutlich gestreut werden. Investiert man hingegen sein gesamtes Vermögen in nur ein einziges Wertpapier, dann führt das meist zu einem bösen Erwachen.

Abschließend kann festgehalten werden, dass die Theorie von Markowitz nicht immer der Wirklichkeit entspricht, sie aber in Zeiten stabiler Märkte eine gute Annäherung an die Realität bietet.

Literaturverzeichnis

Aktas Özlem, Sjöstrand Maria: Cornish-Fisher Expansion and Value-at-Risk method in application to risk management of large portfolios, Master's Thesis in Financial Mathematics, Halmstad University, 2011.

Arditti Fred D., Levy Haim: Portfolio Efficiency Analysis in three Moments: the multiperiod case, *The Journal of Finance*, Volume XXX, No. 3, 1975.

Berk Jonathan B., DeMarzo Peter M.: *Corporate Finance: The Core*, Pearson, Boston, Mass, 2007.

Bevan Andrew, Winkelmann Kurt: Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience, *Fixed Income Research*, 1998.

Black Fischer, Litterman Robert: Global Portfolio Optimization, *Financial Analysts Journal*, Volume 48, Issue 5, 1992.

Brealey Richard A., Myers Stewart C.: *Principles of Corporate Finance*, 7. Auflage, McGraw-Hill, New York, 2003.

Bruns Christoph, Meyer-Bullerdiek Frieder: *Professionelles Portfoliomanagement: Aufbau, Umsetzung und Erfolgskontrolle strukturierter Anlagestrategien*, 4. Auflage, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 2008.

Chunhachinda Pornchai, Dandapani Krishnan, Hamid Shahid, Prakash Arun J.: Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets, *Journal of Banking & Finance*, Volume 21, 1997.

Cremers Jan-Hein, Kritzman Mark, Page Sebastien: Portfolio formation with higher moments and plausible utility, *Reverse Street Working Paper*, 2003.

Davies Ryan J., Kat Harry M, Lu Sa: Fund of hedge funds portfolio selection: A multiple-objective approach, *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, Vol. 15, No. 2, 2009.

Drobtz Wolfgang: Einsatz des Black-Litterman Verfahrens in der Asset Allocation, *Working Paper No. 3, WWZ/Department of Finance*, 2002.

Efron Bradley, Morris Carl: Stein's Paradox in Statistics, *Scientific American*, 1977.

Fabozzi Frank J., Focardi Sergio M., Kolm Petter N.: *Financial Modeling of the Equity Market*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2006.

Feilke Franziska, Gürtler Marc: Quantitatives Prognosemodell für die Anwendung des Black-Litterman-Verfahrens, *IF Working Paper Series IF27*, 2008.

Genschel Ulrike, Becker Claudia: Schließende Statistik: Grundlegende Methoden, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

Gleißner Werner, Romeike Frank: Beyond Markowitz, Die Bank, No. 4, 2010.

Guse Frank, Rudolf Markus: Schiefe in der Portfolioselektion, Credit und Capital Markets, Heft 2, 2008.

Harvey Campbell R., Liechty John C., Liechty Merrill W., Müller Peter: Portfolio Selection With Higher Moments, in Quantitative Finance Volume 10, Issue 5, 2010.

Heidorn Thomas, Kaiser Dieter G., Muschiol Andrea: Portfoliooptimierung mit Hedgefonds unter Berücksichtigung höherer Momente der Verteilung, in Finanz Betrieb, 6/2007a.

Heidorn Thomas, Kaiser Dieter G., Muschiol Andrea: Portfoliooptimierung mit Hedgefonds unter Berücksichtigung höherer Momente der Verteilung, Working Paper No. 77, Frankfurt School of Finance & Management, 6/2007b.

Herold Ulf, Maurer Raimond: „Resampled Efficiency“ – eine überlegene Methode zur Asset Allokation?, Finanz Betrieb, No. 4, 2002.

Idzorek Thomas M.: A step-by-step guide to the black-litterman model, 2002.

Jean William H.: The Extension of Portfolio Analysis to Three or More Parameters, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Volume 6, Issue 1, 1971.

Jobson J.D., Korkie Bob: Putting Markowitz theory to work, The Journal of Portfolio Management, Volume 7, No. 4 1981.

Jondeau Eric, Rockinger Michael: Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments, European Financial Management, Volume 21, No. 1, 2006.

Jones Robert, Lim Terence, Zangari Peter J.: The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios, The Journal of Portfolio Management, Vol. 33, No. 2, 2007.

Jorion Philippe: Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Volume 21, No. 3, 1986.

Jorion Philippe: International Portfolio Diversification with Estimation Risk, Journal of Business, Volume 58, No. 3, 1985.

Jorion Philippe: Portfolio Optimization in Practice, Financial Analysts Journal, Vol. 48, No. 1, 1992.

Kallrath Josef: Gemischte-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis, Vieweg, 2002.

Kruschwitz Lutz: Investitionsrechnung, 12. Auflage, Oldenbourg, München, 2009.

Lai Tsong-Yue: Portfolio Selection with Skewness: A Multiple-Objective Approach, Review of Quantitative Finance and Accounting, 1991.

Lamberti Matthias: Der Einsatz des Black-Litterman-Verfahrens in der Praxis, Books on Demand, 2007.

Levy Haim: A Utility Function depending on the first three moments - Comment, The Journal of Finance, Volume 24, No. 4, 1969.

Mankert Charlotta: The Black-Litterman Model – mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice, Stockholm: KTH, 2006.

Michaud Richard O., Michaud Robert O.: Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation, 2. Auflage, Oxford University Press, New York, 2008.

Michaud Richard O.: An Introduction to Resampled Efficiency, New Frontier Advisors' Newsletter 3, 2002.

Michaud Richard O.: The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?, Financial Analysts Journal, Vol. 45, Issue 1, 1989.

Perridon Louis, Steiner Manfred, Rathgeber Andreas: Finanzwirtschaft der Unternehmung, 14. Auflage, Franz Vahlen, München, 2007.

Pflaumer Peter, Heine Barbara, Hartung Joachim: Statistik für Wirtschaft- und Sozialwissenschaften: Induktive Statistik, Oldenbourg, München, 2001.

Poddig Thorsten, Dichtl Hubert, Petersmeier Kerstin: Statistik, Ökonometrie, Optimierung: Methoden und ihre praktischen Anwendungen in Finanzanalyse und Portfoliomanagement, 4. Auflage, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden, 2008.

Rahn Jochen: Die Portfoliotheorie nach Harry M. Markowitz, GRIN Verlag, Norderstedt, 2010.

Ross Stephen A., Westerfeld Randolph W., Jaffe Jeffrey F.: Corporate Finance, 7. Auflage, McGraw-Hill, Boston, 2005.

Satchell Stephen, Scowcroft Alan: A demystification of the Black-Litterman model: managing quantitative and traditional portfolio construction, Journal of Asset Management, Vol. 1 Number 2, 2000.

Scherer Bernd: Portfolio Resampling: Review and Critique, Financial Analysts Journal, Vol. 59, Issue 3, 2002.

Steiner Manfred, Bruns Christoph: Wertpapiermanagement, 8. Auflage, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2002.

Steiner Peter, Uhlir Helmut: Wertpapieranalyse, 4. Auflage, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

Viebig Jan, Poddig Thorsten, Tancar Roman: Das Black/Litterman-Modell: Portfoliosteuerung in der Praxis, Finanz Betrieb, Heft 2, 2009.

Walters Jay: The Black-Litterman Model In Detail, Boston University, 2014.

Wüthrich Elena: Portfolio versus Benchmark – Performance- und Risikoanalyse im Portfoliomanagement, LIT Verlag, Zürich, 2010.